جامعة الزقازيق
كلية التجارة



مقدمه فى
الإحصاء التطبيقى

دكتور
ابراهيم موسى عبد الفتاح
أستاذ الرياضيات والإحصاء
وكيل كلية التجارة لشئون البيئة

دكتور
حسن محمد على
أستاذ الرياضيات والإحصاء
المساعد

الناشر: المكتبة العلمية - الزقازيق
٢٠٠٥

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وقل اعملوا فسيرى الله
عملكم ورسوله والمؤمنون﴾

صدق الله العظيم

تقديم

لقد أصبح استخدام علم الإحصاء أمراً ضرورياً فى التخطيط وترشيد القرارات الإدارية سواء على مستوى الوحدة الاقتصادية أو علـــى مســتوى الاقتصاد القومى، وأصبح من الضرورى أن تهتم إدارة المنشأة فى تخطيطـها على الأسلوب العلمى، كما أن الدولة لا تستطيع أن ترسم خططها وسياســاتها دون أن تعتمد فى ذلك على التخطيط العلمى والـــذى يعتمــد بــدوره علـــى الأساليب الإحصائية.

وتمثل الأساليب الإحصائية مجموعة من النظريات والأساليب العلمية التى تستخدم لجمع وعرض وتحليل البيانات للوصول إلى أفضل القـــرارات بالنسبة للمشاكل موضع الدراسة أو التخطيط للأنظمة القائمة أو المستحدثة.

لذلك فمن الأهمية بمكان أن يكون الباحثون فى مجـــالات التخطيــط والبحث العلمى على دراية بالأساليب والطرق الإحصائية المختلفـــة وكيفيـــة تطويعها وشروط تطبيقها حتى تكون النتائج والقرارات وعمليات التنبؤ سليمة ومتفقة مع الواقع وصولاً إلى وضع الخطط السليمة.

لذلك فإن هذا الكتاب يهدف إلى مد الدارسين والباحثين ببعض أساليب التحليل الإحصائي فى المجالات المختلفة. ويتكون الكتاب من جزئيين:

الجزء الأول قام بإعداده الأستاذ الدكتور/ **إبراهيم موسى عبد الفتـــاح** ويتضمن ثلاثة أبواب، حيث يشتمل الباب الأول علـــى بعـــض الإختبـــارات الإحصائية اللامعلمية، أما الباب الثانى فيشمل السلاسل الزمنية والتى تمكـــن

من دراسة الظواهر المختلفة عبر الزمن، بينما يتضمن الباب الثالث تحليل التباين فى اتجاه واحد وفى اتجاهين.

أما **الجزء الثانى** فقام بإعداده الأستاذ الدكتور/ **حسن محمد على** ويقع فى أربعة أبواب، يتضمن الباب الأول الأرقام القياسية والتى تعد آداه أساسية من أدوات تحليل الإحصاء الاقتصادي، ويتضمن الباب الثانى الضبط الإحصائي لجودة الإنتاج، فى حين يشتمل الباب الثالث على الإحصاء الديموجرافى، ويشتمل الباب الرابع على الانحدار الخطى المتعدد.

ولقد راعينا فى هذا العرض بساطة الشرح وشموله وتضمين الكتاب عددا كبيرا من الأمثلة المحلولة والمتنوعة والتى تساعد على استيعاب وفهم المادة العلمية موضوع الدراسة.

والله من وراء القصد وهو الهادى إلى سواء السبيل.....

المؤلفان

الجزء الأول

- بعض الاختبارات الإحصائية اللامعلمية.
- السلاسل الزمنية.
- تحليل التباين.

فهرس الجزء الأول

الباب الأول

بعض الإختبارات الإحصائيه اللامعلميه

Some Non - Parametric Statisticcal tests

(١) مقدمة:

مما لا شك فيه أن قياس المؤشرات أو المعالم الإحصائيه للمجتمع محل الدراسة والوصول إلى إستنتاجات عنها يعتبر من أهم أهداف علم الإحصاء، إلا أن هذه المعالم المجهولة لا يمكن معرفتها إلا بالحصر الشامل لكل مفردات المجتمع ودراسة هذه المفردات، ونحن نعلم يقيناً أن هذا الأمر أصبح مكلفاً للغاية بل ومستحيل فى أغلب الأحيان.

ولذلك يأتى دور الإستدلال الإحصائى وهو يمثل أهم مجالات علم الإحصاء وأكثرها إستخداماً ويقصد به الوصول إلى معلومات عن المجتمع موضوع البحث بإستخدام عدد محدود من مفرداته يعرف بإسم العينه ويتحقق ذلك عن طريقين:

الأول: تقدير المعالم الإحصائيه Parameters للمجتمع محل الدراسة.

وهذه المعالم وتقديراتها متنوعة فمنها ما يقيس القيمة المتوسطة (كالوسط الحسابى أو الوسيط أو المنوال) ومنها ما يقيس درجة تشتت أو إنتشار الظاهرة محل الدراسة (كالإنحراف المعيارى أو الإنحراف المتوسط أو معامل الإختلاف) ومنها ما يقيس العلاقة بين ظاهرتين أو أكثر (كمعامل الإرتباط أو معادلة الإنحدار).

ويوجد طـرق متعددة للتقدير فهنـاك التقدير بنقطـة حيث يتـم تقدير معلمة المجتمع بقيمة وحيدة (كأن نعتبر أن الوسط الحسابى للعينه ($\bar{س}$) تقدير وحيد للوسط الحسابى للمجتمع (μ). ويعاب على هذه الطريقة أنه كلما تعددت العينات المأخوذة من المجتمع تتعدد التقديرات، ولذلك يأتى التقدير بفترة حيث يتم تقدير معلمة المجتمع داخل فترة إحتماليـه تعتمـد علـى التوزيـع الإحتمـالى للتقدير وبإحتمال معين.

الثانى: إختبارات الفروض الإحصائية عن معالم المجتمع.

وهى تمثـل وسيلة التعميم مـن الخـاص إلـى العـام، فبإستخدام نتـائج العينات يتم تحديد ما إذا كانت معالم المجتمع لها قيـم معينـه أم تختلـف عنهـا، حيث يقوم الباحث بوضع فرض أو عدة فروض عن الظـاهرة محـل الدراسـة ولكى يقبل أو يرفض هذه الفروض يقوم بإختيار عينه من مجتمع الدراسـة ثـم يحسب بعض المقاييس من بيانات العينه ويستخدمها فـى الوصـول إلـى قـرار تجاه تلك الفروض الموضوعة بالقبول أو الرفض.

وقد سبق لنا دراسة بعض الإختبـارات الإحصائيـه والمتعلقـة بالوسـط الحسابى للمجتمع (μ) والفرق بين وسطين حسـابيين فـى مجتمعيـن ($\mu_1-\mu_2$) وكذا الإختبارات المتعلقة بنسبة حدوث حدث معين بالمجتمع (ق) والفرق بيـن نسبتين فى مجتمعين (ق$_1$-ق$_2$) وإختبارات تحليل التباين.

ويطلـق علـى هـذا النـوع مـن الإختبـارات بالإختبـارات المعلميـه Parametric Tests حيث تفترض شروط معينــه- تحتـاج لتفهمهـا إلـى إحصائى متخصص- خاصة بالتوزيع (التوزيعـات) التـى سـحبت منهـا العينـه

(العينات)، بعض هذه الشروط تتصل بالمعالم ذاتها كافتراض معلوميه قيم المعالم أو تساويها والبعض الآخر يتصل بشكل التوزيع (التوزيعات).

ويلاحظ أن الإفتراض الشائع إستخدامه فى إختبارات الفروض الإحصائيه هو أن المجتمع الأصلى موزع توزيع طبيعى أو على الأقل فإن العينه (أو العينات) المسحوبه من هذا المجتمع لها متوسط (أو متوسطات) موزع (أو موزعة) توزيعاً طبيعياً.

ونتائج تلك الإختبارات المعلميه مشروطة بتحقيق الفروض الأساسية التى وضعت مسبقاً قبل إجراء الإختبارت، وإذا لم تتحقق هذه الشروط أو الفروض فإن هذه الإختبارات لا تقوم على سند صحيح وتكون نتائجها غير صحيحة، فضلاً عن أن هذه الإختبارات تجرى حينما تكون القياسات كمية تخضع للعمليات الحسابية المعروفة من جمع وطرح وضرب وقسمة.

ولكن كثيراً ما يصادفنا متغيرات أو ظواهر وصفية (كالذكاء والديانة والحالة المعنوية ودرجة المهارة ..... الخ) لا يمكن قياسها كمياً بل يمكن فقط ترتيبها، وحتى لو أستخدمت الأرقام الحقيقية فى قياس تلك الظواهر فإن هذه الأرقام لا تكون إلا وسيلة لوضع المفردات فى صورة ترتيبية.

لذلك فبالإضافة إلى الإختبارات المعلميه يوجد إختبارات إحصائية لا تفترض أى شروط مسبقة عن معالم المجتمع أو على الأقل لها شروط ميسرة عن تلك المعالم يمكن تحقيقها بسهولة، كما أنها لا تعتمد على شكل توزيع الظاهرة محل الدراسة. هذه الإختبارات تسمى بالإختبارات اللامعلميه- Non Parametric Tests.

فالإختبارات اللامعلميه تتميز بأنها لا تفترض وجود أية معلومات أو شروط مسبقة عن التوزيع الإحتمالى للمجتمع أو معالم ذلك المجتمع أو على الأقل تقلل من هذه الفروض أو الشروط، كما أنها تستخدم بكثرة فى حالة البيانات الوصفية والتى تعتمد على ترتيب المفردات وبذلك فهى تلائم الكثير من الأبحاث فى مجال علم الإجتماع وعلم النفس والإعلام والإدارة..... الخ، فضلاً عن أن طريقة إجراء الإختبارات اللامعلميه سهلة وسريعة وتلائم الباحثين غير المتخصصين فى الإحصاء لعدم إحتياجها الى خلفية إحصائية كبيرة والتى يجب توافرها فى حالة الإختبارات المعلميه.

وبالرغم من تلك المزايا للإختبارت اللامعلميه إلا أنه يصاحب أستخدامها بعض العيوب فالإختبارات اللامعلميه تحول البيانات الأصلية- فى أغلب الأحوال- إلى رتب مما يفقدها جانب كبير من الدقة اللازمة لكفاءة الإختبار، كما أن العمليات الحسابية المطلوبة لإجراء بعض هذه الإختبارات قد يكون معقدة. ولذلك ففى الحالات التى يمكن فيها إستخدام كلا النوعين من الإختبارت فإنه يفضل إستخدام الإختبارت المعلميه.

وسوف نعرض فى الجزء التالى بعض الإختبارت الإحصائية اللامعلميه فى حالة عينة واحدة وفى حالة عينتين مسحوبتين من مجتمع الدراسة.

٣ إختبارات جودة التوفيق: Goodness of Fit Tests

إذا كان لدينا مجموعة من المفردات لعينه مأخوذة من مجتمع الدراسة ونرغب فى التعرف على التوزيع الإحتمالى لهذه البيانات، أو قد يكون لدينا مجموعتين أو أكثر من البيانات للعينتين أو أكثر مسحوبتين من نفس المجتمع

ونود أن نعرف ما إذا كان لهاتين المجموعتين من البيانات نفس التوزيع الإحتمالى أم لا. ويتم ذلك عن طريق ما يسمى بتوفيق المنحنيات (أو بناء النماذج) حيث تبدأ بإفتراض توزيع إحتمالى نظرى يمكن أن تخضع له البيانات، ويتوقف هذا الإفتراض على طبيعة البيانات وهل هى لمتغيرات منفصلة أو متصلة كما يتوقف على بعض المقاييس الإحصائية الهامة للبيانات مثل الوسط الحسابى والوسيط والإنحراف المعيارى .....الخ. ثم تستخدم بيانات العينة والتوزيع الإحتمالى المفترض فى تقدير معالم هذا التوزيع والذى يفيد بدوره فى الحصول على الإحتمالات ومن ثم التكرارات المتوقعة.

والتساؤل الذى يطرح نفسه بعد ذلك-على الفور- هو: هل البيانات المشاهدة تختلف معنوياً عن البيانات المتوقعة أم لا؟ أو بمعنى آخر هل بيانات العينه تخضع بالفعل للتوزيع الإحصائى النظرى الذى تم افتراضه أم لا؟. فإذا كان الفرق بين البيانات المشاهدة والبيانات المتوقعة غير معنوى فيعنى ذلك أن بيانات العينه تضخع للتوزيع النظرى المفترض والعكس صحيح. ومن هنا نشأت الحاجة إلى إختبارات إحصائية لدراسة جودة التوفيق.

فإختبار جودة التوفيق هو إختبار إحصائى يمكن بإستخدامه معرفة هل التوزيع (أو المنحنى) الإحصائى النظرى الذى تم توفيقه (أو افتراضه) بإستخدام بيانات العينة المأخوذة من المجتمع الأصلى يمثل تمثيلاً جيداً توزيع المتغير محل الدراسة فى هذا المجتمع أم لا؟، أو بمعنى آخر هل الإختلاف بين التوزيع الإحتمالى النظرى الذى تم توفيقه وتوزيع العينة إختلاف بسيط يرجع إلى عوامل الصدفة أم أن هناك اختلاف فعلى بين التوزيعين؟

ويوجد أنواع عديدة لإختبارات جودة التوفيق سوف نركز على أثنين منها لأهميتهما من الناحية التطبيقية وهما:

١- إختبار كا٢ ٢- إختبار كولومجروف سيمرنوف

(٢-١) إختبار كا٢ لجودة التوفيق: χ^2 - Test

يستخدم إختبار كا٢ لإختبار ما إذا كانت بيانات العينة تتبع توزيع إحتمالى نظرى معين أو لإختبار إستقلال متغيرين (ظاهرتين) أو لدراسة العلاقة بين متغيرين (ظاهرتين) أو أكثر للتأكد من صحة فرض معين، ويتم ذلك عن طريق معرفة ما إذا كان هناك فرقاً معنوياً بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة أم لا. فكلما قل الفرق بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة كلما اقترب التوزيع الفعلى من التوزيع الإحتمالى النظرى وتنعدم الفروق تماماً عندما يتطابق التوزيعان الفعلى والنظرى، أما إذا كان الفرق بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعه معنوياً (أى أكبر مما يمكن التنبؤ بحدوثه بطريق الصدفة) فيعنى ذلك أن بيانات العينة لا تتبع التوزيع الإحتمالى النظرى أو أن العينة أختيرت من مجتمع الدراسة بطريقة غير عشوائيه.

أولاً: إختبار كا٢ لتوفيق التوزيعات الإحتماليه النظريه أو أى توزيع آخر غير محدد الصيغة.

إذا كان هناك عينه عشوائيه مكونه من المفردات المستقله، تأخذ مفرداتها القيم س١،س٢،........، سل، حيث ل تمثل عدد الخلايا أو الفئات التى تضم مفردات العينة على أن تكون هذه الخلايا شاملة ومانعة، وبفرض أن شر هو عدد المفردات التى تأخذها القيمة سر(أى التكرارات المشاهدة المناظرة للقيمه سر)، بحيث أن $\sum_{ر=1}^{ل}$ شر = ن، فى الصورة:

المجموع	$س_ل$ .... $س_٢$ $س_١$	القيمة ($س_ر$)
ن	$ش_ل$ .... $ش_٢$ $ش_١$	التكرار المشاهد ($ش_ر$)

فإذا تم توفيق توزيع إحتمالي نظرى (أو أى توزيع آخر غير محدد الصيغة) للمتغير العشوائى $س_ر$ دالة إحتماله (أو دالة كثافة إحتماله) هى د(س)، فإنه يمكن أستخدام الدالة د(س) فى حساب إحتمال أن تقع المفردة فى الخليه رقم ر والذى نرمز له بالرمز $ح_ر$ وبذلك يكون لدينا إحتمالات مناظرة لجميع الخلايا وهى على الترتيب $ح_١$، $ح_٢$، ....، $ح_ل$، حيث :

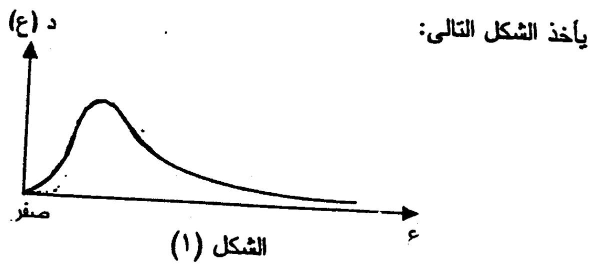
$\sum_{ر=١}^{ل} ح_ر = ١$، وبضرب هذه الإحتمالات فى مجموع التكرارات (ن) يتم الحصول على التكرارات المتوقعة والتى نرمز لها بالرمز $ت_ر$،

أى أن:

$$ت_ر = ح_ر \times ن$$

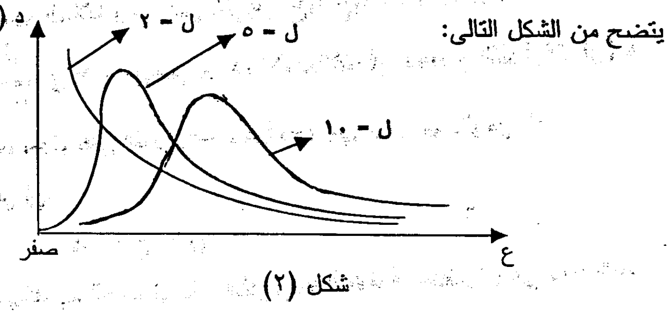
وبذلك يتم الحصول على التكرارات المتوقعة المناظرة وهى $ت_١$، $ت_٢$، ....، $ت_ل$ على الترتيب، بحيث أن: $\sum_{ر=١}^{ل} ت_ر = ن$.

وقبل التعرض لإجراء إختبار $كا^٢$، تجدد الإشارة إلى أن توزيع $كا^٢$ يأخذ الشكل التالى:



الشكل (١)

وكما هو واضح فتوزيع كا^2 ملتوى التواءاً شديداً جهة اليمين وتتوقف درجة التوائه على عدد درجات الحرية (ل)، فكلما كان عدد درجات الحريه صغيراً كلما كان منحنى التوزيع شديد الإلتواء جهة اليمين وكلما ازداد عدد درجات الحريه كلما قل التواء التوزيع وأصبح أكثر تماثلاً لدرجة أن المنحنى يأخذ شكل منحني التوزيع الطبيعي تقريباً عند درجات الحريه الكبيرة كما يتضح من الشكل التالي:



شكل (٢)

ولتوزيع كا^2 جداول خاصة تعبر عن المساحة تحت منحنى التوزيع وتستخدم هذه الجداول فى إيجاد المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين أى نقطتين كما سنرى فيما بعد.

ونعود إلى كيفية إجراء إختبار كا^2 لجودة التوفيق، حيث تصاغ المشكلة فى صورة الفرضين الآتيين:

الفرض العدمى: H_0: لا يوجد فرق معنوى بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة، أو أن التوزيع الإحصائى النظرى المفترض يتفق مع التوزيع الفعلى للمتغير.

الفرض البديل: H_1: يوجد فرق معنوى بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة، أو أن التوزيع الإحصائى النظرى المفترض لا يتفق مع التوزيع الفعلى للمتغير.

ويجرى الإختبار وفقا للخطوات التاليه:

١- يحسب الإحصاء كا^{2} وهو عبارة عن مجموع مربعات الفروق بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة مقسوماً على التكرارات المتوقعه، أى أن:

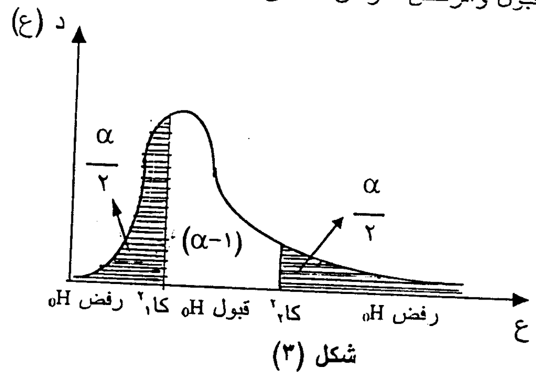
$$\text{كا}^{2}\ \text{المحسوبة} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ل}} \left[\frac{(\text{التكرار المشاهد رقم ر} - \text{التكرار المتوقع رقم ر})^{2}}{\text{التكرار المتوقع رقم ر}}\right]$$

وباستخدام الرموز، فإن:

$$\text{كا}^{2}\ \text{المحسوبة} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ل}} \left[\frac{(\text{ش}_{\text{ر}} - \text{ت}_{\text{ر}})^{2}}{\text{ت}_{\text{ر}}}\right]$$

والإحصاء كا^{2} يعد متغير عشوائى يتبع توزيع كا^{2} بدرجات حريه عددها (ل -١- عدد المعلمات المقدرة)، حيث ل تمثل -كما أوضحنا- عدد الفئات أو المجموعات التى تتوزع فيها مفردات العينه.

٢- من جدول توزيع كا^{2} وعند درجات الحريه (ل -١- عدد المعلمات المقدره) ولمستوى المعنويه α يتم إيجاد قيمتى كا$_{1}^{2}$ ، كا$_{2}^{2}$ ويحدد بهما منطقتى القبول والرفض للفرض العدمى كما يلى:



شكل (٣)

٣- إذا وقعت قيمة كا^{٢} المحسوبه فى منطقة القبول نقبل الفرض العدمى، أما إذا وقعت فى منطقة الرفض فنرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل.

ويلاحظ أن قيمة الإحصاء كا^{٢} تعتمد على عدد الفئات التى تتوزع فيها مفردات العينه حيث تزداد قيمته بزيادة عدد الفئات، ومن ثم لكى يكون الإحصاء كا^{٢} قريبا قدر الإمكان من التوزيع النظرى الموجود بالجدول لابد من توافر شرطان أساسيان وهما:

أ- أن يكون حجم العينه (أى مجموع التكرارات)أكبر من ٣٠ مفردة.

ب- أن يكون التكرار المتوقع لكل خليه أكبر من أو يساوى ٥ مفردات.

فإذا لم يتحقق الشرط الأول فيجب فى هذه الحاله استخدام إختبار آخر مثل إختبار كولومجروف سيمرنوف بدلاً من إختبار كا^{٢}، وإذا لم يتحقق الشرط الثانى فيجب ضم تكرارات بعض الخلايا المتجاورة (المشاهدة والمتوقعه) التى تحتوى على عدد صغير من التكرارات لنحصل فى النهاية على خلايا تكراراتها المتوقعه أكبر من أو تساوى ٥ مع ملاحظة أنه يتم فقد درجة حرية لكل عمليه ضم.

مثال (١)

الجدول التالى يبين توزيع ٢٠٠ طالب بكلية العلوم الإدارية والتخطيط بجامعة الملك فيصل حسب المعدل التراكمى للطالب:

المعدل التراكمى	صفر-	١-	٢-	٣-	٤-٥	المجموع
عدد الطلاب	٢٨	٣٥	٥٣	٤٥	٣٩	٢٠٠

والمطلوب: توفيق توزيع منتظم يوضح توزيع الطلاب حسب المعدل التراكمى وإختبار جودة التوفيق بدرجة ثقه ٩٥٪.

الحل

H_o: توزيع الطلاب بالكلية حسب فئات المعدل الـتراكمى يتبع التوزيـع المنتظم.

H_1: توزيـع الطـلاب بالكلية حسـب فئـات المعـدل الـتراكمى لا يتبـع التوزيع المنتظم.

نفرض أن س تشير إلى المعدل التراكمى للطـالب، وحيـث أنـه يوجـد خمس فئـات للمعـدل الـتراكمى،حيـث صفـر ≤ س ≤ ٥، فلكـى نوفـق توزيعاً منتظماً فإن دالة كثافة الإحتمال للمتغير س هى:

$$د(س) = \frac{١}{٥} \quad ، \quad صفر ≤ س ≤ ٥$$

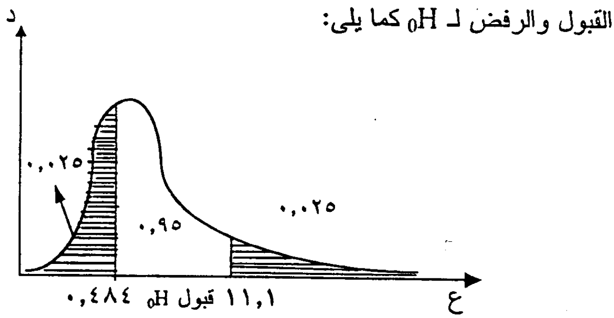
ومن ثم إحتمال أن ينتمى الطالب إلى أى فئه من فئات المعدل التراكمى سيكون متساويا ويساوى $\frac{١}{٥}$ ، وبضرب هذا الإحتمال فى مجموع التكرارات وهو ٢٠٠ ينتج التكرار المتوقع لكل خليه وهو ٤٠ كما يتضح من الجدول التالى:

فئات المعدل التراكمى $س_ر$	التكرارات المشاهدة $ش_ر$	التكرارات المتوقعة $ت_ر$	$(ش_ر - ت_ر)^٢$	$(ش_ر - ت_ر)^٢ \backslash ت_ر$
صفر−	٢٨	٤٠	١٤٤	٣,٦
١−	٣٥	٤٠	٢٥	٠,٦٢٥
٢−	٥٣	٤٠	١٦٩	٤,٢٢٥
٣−	٤٥	٤٠	٢٥	٠,٦٢٥
٤−٥	٣٩	٤٠	١	٠,٠٢٥
المجموع	٢٠٠	٢٠٠		٩,١

من الجدول نجد أن:

$$\text{كا}^2 \text{ المحسوبه} = \sum_{ر=1}^{5} \left[\frac{(ش_ر - ت_ر)^2}{ت_ر}\right] = 9,1$$

وعند مستوى المعنويه α = ٠,٠٥ ودرجات الحريه = (٥-١) = ٤ فإن قيمتى كا^2 الجدوليتين هما كا$_1^2$ = ٠,٤٨٤، كا$_2^2$ = ١١,١ وتكون منطقتى القبول والرفض لـ H_0 كما يلى:



وحيث أن قيمة كا^2 المحسوبه تقع فى منطقة القبول لذلك نقبل الفرض العدمى (H_0)، ويعنى ذلك أن منحنى التوزيع المنتظم يعتبر توفيق جيد لتوزيـع طلاب الكلية حسب فئات المعدل التراكمى.

مثال (٢)

قامت إحدى محطات تربية الدواجن بتوريد ١٠٠ كرتونه بيض لأحـد محلات تسويق المواد الغذائيه (كل كرتونه تحتوى علـى ٣٠ بيضـه) ولوحظ توزيع عدد البيض المكسور بالكرتونه وكان كما يلى:

عدد البيض المكسور	صفر	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
عدد الكراتين	٢٢	٢٨	٣٥	١٠	٣	٢	١٠٠

والمطلوب: توفيق دالة إحتمال توزيع ذات الحدين لعدد البيض المكسور بالكرتونه فى المحطة وإختبار جودة التوفيق عند درجة الثقه ٩٥٪.

الحل

نفرض أن إحتمال وجود بيضه مكسوره بالكرتونه يساوى ح، فإن دالة الإحتمال لتوزيع ذات الحدين تتوقف على معلمتين مجهولتين وهما ن ، ح حيث:

$$د(س=ر) = {}^{ن}ق_{ر}\ ح^{ر}\ (١ - ح)^{ن-ر} \qquad ر = ٠، ١، ......، ٥.$$

من البيانات المعطاه يتضح أن ن = ٥ ، ويتم تقدير ح بإستخدام طريقة العزوم كالآتى:

$$\text{متوسط عدد البيض البيض المكسور بالكرتونه } (\bar{س}) = \frac{مجـ\ س_{ر}\ ك_{ر}}{مجـ\ ك_{ر}}$$

$$= \frac{صفر(٢٢) + ١(٢٨) + ٢(٣٥) + ٣(١٠) + ٤(٣) + ٥(٢)}{١٠٠} = ١,٥$$

المتوسط النظرى لتوزيع ذات الحدين = ن ح = ٥ ح

إذن:

٥ ح = ١,٥ ومنها ح = ٠,٣

بالتعويض عن قيمة كل من ن ، ح فإن دالة الإحتمال لتوزيع ذات الحدين تأخذ الصورة:

$$د(س=ر) = {}^{٥}ق_{ر}\ (٠,٣)^{ر}\ (٠,٧)^{٥-ر} \qquad ر = ٠، ١، ......، ٥$$

لإختبار جودة التوفيق لهذا التوزيع تصاغ المشكلة كما يلى:

H_0: عدد البيض المكسور بالكرتونه الواحده يتبع توزيع ذات الحدين بالمعلمتين ن = ٥ ، ح = ٠,٣

H_1: عدد البيض المكسور بالكرتونه الواحده يختلف عن توزيع ذات الحدين بالمعلمتين ن = ٥ ، ح = ٠,٣

تستخدم دالة الإحتمال التى تم توفيقها فى إيجاد الإحتمالات المتوقعه عند القيم الممكنه لها وهى ٠ ، ١ ، ٢، ......، ٥ كما يمكن إيجاد هذه الإحتمالات مباشرة من جداول توزيع ذات الحدين حال توافرها. وبضرب هذه الإحتمالات فى مجموع التكرارات (وهو ١٠٠) ينتج التكرارات المتوقعه كما يتضح من الجدول التالى:

س= ر	٥قر (٠,٣)ر (٠,٧)٥-ر	التكرارات المتوقعه (تر)
صفر	د(صفر) = ٥قصفر(٠,٣)صفر (٠,٧)٥ = ٠,١٦٨١	١٦,٨١
١	د (١) = ٥ق١ (٠,٣)١ (٠,٧)٤ = ٠,٣٦٠٢	٣٦,٠٢
٢	د (٢) = ٥ق٢ (٠,٣)٢ (٠,٧)٣ = ٠,٣٠٨٧	٣٠,٨٧
٣	د (٣) = ٥ق٣ (٠,٣)٣ (٠,٧)٢ = ٠,١٣٢٣	١٣,٢٣
٤	د (٤) = ٥ق٤ (٠,٣)٤ (٠,٧)١ = ٠,٠٢٨٤	٢,٨٤
٥	د (٥) = ٥ق٥ (٠,٣)٥ (٠,٧)صفر = ٠,٠٠٢٤	٠,٢٤
المجموع		١٠٠,٠١

وحيث أن مجموع التكرارات المشاهدة = مجموع التكرارات المتوقعه = ١٠٠، فالفرق ٠,٠١ ناتج بالطبع من التقريب فى العمليات الحسابيه.

ولأن إختبار كا^2 يشترط ألا يقل التكرار المتوقع لأى خليه عن ٥، لذلك سيتم دمج الخلايا الثلاث الأخيره لكى يصبح التكرار المتوقع لهم معاً ≤ ٥ كما يتضح فى الجدول التالى والذى نحسب منه الإحصاء كا^2:

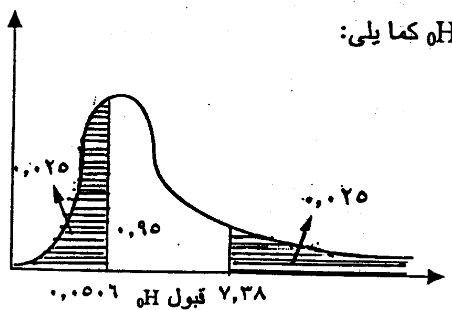
س= ر	ش$_ر$	ت$_ر$	(ش$_ر$ – ت$_ر$)^2	(ش$_ر$ – ت$_ر$)^2/ت$_ر$
صفر	٢٢	١٦,٨١	٢٦,٩٤	١,٦٠
١	٢٨	٣٦,٠٢	٦٤,٣٢	١,٧٩
٢	٣٥	٣٠,٨٧	١٧,٠٦	٠,٥٥
٣–٥	١٥	١٦,٣١	١,٧٢	٠,١١
المجموع	١٠٠	١٠٠		٤,٠٥

كا^2 المحسوبة = ٤,٠٥

درجات الحرية = عدد خلايا الجدول بعد عملية الدمج–عدد المعلمات المقدرة

= ٤ – ٢ = ٢

يتم إيجاد قيمتى كا^2 الجدوليتين عند درجات الحريه ٢ ولمستوى المعنوية ٠,٠٥ وهما: كا$_1^2$ = ٠,٠٥٠٦، كا$_2^2$ = ٧,٣٨، ويحدد بهما منطقتى القبول والرفض لـ H_0 كما يلى:



وحيث أن قيمة كا٢ المحسوبة تقع فى منطقة القبول، لذلك يتم قبول الفرض العدمى (H_0) والذى يقضى بأن البيض المكسور بالكرتونه يتبع توزيع ذات الحدين بالمعلمتين ن = ٥ ، ح = ٠,٣

ثانياً: إختبار كا٢ لإستقلال متغيرين (ظاهرتين) فى مجتمع واحد أو تجانس متغير (ظاهرة) ما فى عدة مجتمعات.

إذا كان هناك عينة مكونة من ن مفردة مأخوذة من مجتمع ما وسجل لكل مفردة مشاهدتين كل على متغير ما (كدرجة الذكاء ومستوى المعيشة مثلا)، فإنه يمكن إستخدام إختبار كا٢ لمعرفة ما إذا كان المتغيران مستقلين، بمعنى أن توزيع أحد المتغيرين لا يتوقف على توزيع المتغير الآخر، أم لا.

فإذا فرض أن سر (ر = ١، ٢، ......،ل) هى مستويات المتغير الأول، صو (و = ١، ٢، ......،ك) هى مستويات المتغير الثانى، **فيتم تبويب البيانات فى هذه الحالة فى شكل جدول تكرارى مزدوج مكون من ل صف،** ك عمود على الصورة:

المتغير الثانى (صو) / المتغير الأول (سر)	١	٢	....	ك	المجموع
١	ش١١	ش٢١	....	ش١ك	ش١.
٢	ش١٢	ش٢٢	....	ش٢ك	ش٢.
⋮	⋮				⋮
ل	شل١	شل٢	....	شل ك	ش ل.
المجموع	ش.١	ش.٢	....	ش.ك	ش.. = ن

فإذا فرض أن $ح_{رو}$ يمثل إحتمال سحب مفردة من المجتمع تكون فى المستوى ر للمتغير الأول والمستوى و للمتغير الثانى، ففى حالة استقلال المتغيرين فإن:

$$\text{ح}_{\text{رو}} = \text{ح}(\text{س}_{\text{ر}} \cap \text{ص}_{\text{و}}) = \text{ح}(\text{س}_{\text{ر}}) \times \text{ح}(\text{ص}_{\text{و}})$$

أما إذا كان المتغيران غير مستقلين فإن:

$$\text{ح}_{\text{رو}} = \text{ح}(\text{س}_{\text{ر}} \cap \text{ص}_{\text{ر}}) \neq \text{ح}(\text{س}_{\text{ر}}) \times \text{ح}(\text{ص}_{\text{ر}}) .$$

فإذا كان $ش_{رو}$ يمثل التكرار المشاهد الذى ينتمى إلى المستوى ر للمتغير الأول والمستوى و للمتغير الثانى، فإن التكرار المتوقع لتلك الخليه سوف يرمز له بالرمز $ت_{رو}$ حيث:

$$\text{ت}_{\text{رو}} = \text{ن} \times \text{ح}_{\text{رو}}$$

وفى حالة استقلال المتغيرين س ، ص فإن:

$$\text{ح}_{\text{رو}} = \text{ح}_{\text{ر}} \times \text{ح}_{\text{و}}$$

حيث $ح_{ر}$ ، $ح_{و}$ هما إحتمال وقوع المفردة فى المستوى ر للمتغير الأول، إحتمال وقوع المفردة فى المستوى و للمتغير الثانى على الترتيب، وكلاهما يحسب كالآتى:

$$\text{ح}_{\text{ر}} = \frac{\text{ش}_{\text{ر.}}}{\text{ن}} = \frac{\text{مجموع التكرارات المشاهدة فى الصف رقم ر}}{\text{ن}}$$

$$\text{ح}_{\text{و}} = \frac{\text{ش}_{\text{.و}}}{\text{ن}} = \frac{\text{مجموع التكرارات المشاهدة فى العمود رقم و}}{\text{ن}} .$$

إذن، فى ظل فرض استقلال المتغيرين فإن:

$$ت_{رو} = ن \times ح_ر \times ح_و = ن \times \frac{ش_{ر.}}{ن} \times \frac{ش_{.و}}{ن} = \frac{ش_{ر.} \times ش_{.و}}{ن}$$

أى أن:

التكرار المتوقع للخليه التى تنتمى إلى الصف ر والعمود و

$$= \frac{\text{مجموع التكرارات المشاهدة فى الصف ر} \times \text{مجموع التكرارات المشاهدة فى العمود و}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

وتصاغ المشكلة فى هذه الحالة كما يلى:

H_0 : لا يوجد علاقة معنوية بين المتغيرين س ، ص.

H_1 : يوجد علاقة معنوية بين المتغيرين س ، ص.

ويجرى إختبار كا^2 كما يلى:

١- بعد حساب التكرارات المتوقعة (ت‌رو) لكل خلايا الجدول، تحسب قيمة كا^2 كما يلى:

$$كا^2_{\text{المحسوبه}} = \sum_{ر=1}^{ل} \sum_{و=1}^{ك} \left[\frac{(ش_{رو} - ت_{رو})^2}{ت_{رو}}\right]$$

٢- درجات الحريه فى هذه الحالة تساوى (عدد الصفوف - ١) × (عدد الأعمدة - ١) أى تساوى (ل - ١) (ك - ١)، لذلك فعند درجات الحريه (ل-١) (ك-١) ولمستوى المعنويه α يتم إيجاد قيمتى $كا_1^2$، $كا_2^2$ الجدوليتين ونحدد بهما منطقتى القبول والرفض للفرض العدمى كالمعتاد.

٣- إذا وقعت قيمة كا^2 المحسوبة فى منطقة القبول، نقبل الفرض العدمى والذى يقضى بعدم وجود علاقة بين المتغيرين أو العكس.

كما يستخدم إختبار كا^2 فى إختبار تجانس توزيع متغير (ظاهرة) ما فى عدة مجتمعات حيث نسحب عينه ذات حجم معين من كل مجتمع وبالتالى

فإن المجاميع الهامشيه تكون مثبته فى إتجاه واحد هو مجاميع الصفوف (أو الأعمدة) التى تمثل عينات المجتمعات، بينما فى حالة دراسة استقلال متغيرين فى مجتمع واحد يكون هناك عينه واحده يشاهد على كل مفردة من مفرداتها الإنتماء إلى كل من المتغيرين وبالتالى يكون مجموع المفردات الكلى مثبت أما مجاميع الصفوف ومجاميع الأعمدة فغير ثابت. ويتم إختبار تجانس توزيع متغير ما فى عدة مجتمعات بنفس طريقة إختبار استقلال متغيرين فى مجتمع واحد.

مثال (٣)

سحبت عينه عشوائيه من ١٠٠ فرد من إحدى المدن وتم توزيعهم حسب النوع ودرجة التدخين وكانت بياناتهم كما يلى:

درجة التدخين / النوع	يدخن بشدة	يدخن أحياناً	لا يدخن	المجموع
ذكر	٣٥	١٥	١٠	٦٠
أنثى	١٥	٥	٢٢٠	٤٠
المجموع	٥٠	٢٠	٣٠	١٠٠

إختبر الفرض القائل بوجود علاقة بين نوع الفرد ودرجة التدخين بدرجة ثقة ٩٩٪.

الحل

H_0 : لا يوجد علاقة بين نوع الفرد ودرجة التدخين.

H_1 : يوجد علاقة بين نوع الفرد ودرجة التدخين.

يحسب التكرار المتوقع لكل خليه كما سبق أن أوضحنا،

فمثلا:

التكرار المتوقع للخليه ذكر ويدخن بشدة = $ت_{١١} = \frac{٥٠ \times ٦٠}{١٠٠} = ٣٠$

وهكذا بالنسبة لباقى الخلايا كما يتضح فى الجدول التالى:

النوع / درجة التدخين	يدخن بشدة		يدخن أحياناً		لا يدخن		المجموع
	شر	تر	شر	تر	شر	تر	
ذكر	٣٥	٣٠	١٥	١٢	١٠	١٨	٦٠
أنثى	١٥	٢٠	٥	٨	٢٠	١٢	٤٠
المجموع	٥٠		٢٠		٣٠		١٠٠

ملحوظة: يمكن الإكتفاء بحساب أول تكرار متوقع فقط ونحصل على بقية التكرارات المتوقعة بالطرح إعتماداً على حقيقة أن مجموع التكرارات المشاهدة والمتوقعة للصف أو للعمود ثابت.

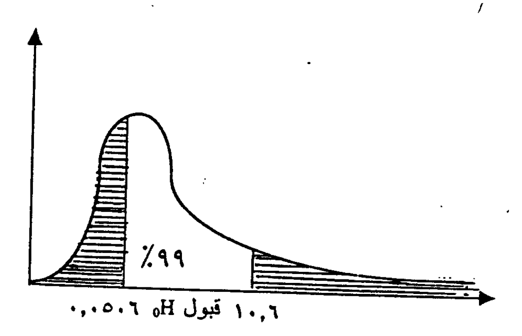
$$كا^{٢}\ المحسوبة = \frac{(٣٥-٣٠)^{٢}}{٣٠} + \frac{(١٥-١٢)^{٢}}{١٢} + \frac{(١٠-١٨)^{٢}}{١٨} + \frac{(١٥-٢٠)^{٢}}{٢٠} +$$

$$\frac{(٥-٨)^{٢}}{٨} + \frac{(٢٠-١٢)^{٢}}{١٢} = ١٢,٨٤٥.$$

من جدول توزيع $كا^{٢}$ وعند درجات الحرية = (ل-١) (ك-١)

= (٢-١) (٣-١) = ٢ ولمستوى المعنوية ٠,٠٥ نجد أن $كا_{١}^{٢}$ = ٦,٠١،

$كا_{٢}^{٢}$ = ١٠,٦ كما يتضح بالشكل التالى:



وحيث أن قيمة كا^2 المحسوبة تقع فى منطقة الرفض، إذن نرفض H_0 ونقبل H_1 والقائل بأنه توجد علاقة بين نوع الفرد ودرجة التدخين بدرجة ثقة ٩٩٪.

مثال (٤)

الجدول التالى يبين نتيجة أحد الإختبارات فى نهاية دورة تدريبية موحدة عقدت لثلاثة أقسام مختلفة بإحدى شركات الغزل والنسيج:

النتيجة / القسم	نجاح	فشل	المجموع
الغزل	٦٥	١٥	٨٠
النسيج	٦٢	٨	٧٠
الطباعة	٣٨	١٢	٥٠
المجموع	١٦٥	٣٥	٢٠٠

والمطلوب: إختبار ما إذا كانت قدرات المتدربين متقاربة فى الأقسام الثلاثة بدرجة ثقة ٩٥٪.

الحل

H_0 : قدرات المتدربين متقاربة فى الأقسام الثلاثة.

H_1 : قدرات المتدربين متفاوتة فى الأقسام الثلاثة.

نحسب التكرار المتوقع لكل خليه بنفس الطريقة السابق ذكرها، فبالنسبة لخلايا العمود الأول نجد أن:

ت١١= $\frac{٨٠\times١٦٥}{٢٠٠}$ = ٦٦، ت١٢ = $\frac{٧٠\times١٦٥}{٢٠٠}$ = ٥٧,٧٥، ت١٣= $\frac{٥٠\times١٦٥}{٢٠٠}$ = ٤١,٢٥،

ويمكن الحصول على التكرارات المتوقعة لخلايا العمود الثانى اعتماداً على أن مجموع التكرارات المتوقعة فى كل صف (أو عمود) = مجموع التكرارات المشاهدة فى نفس الصف (أو العمود) حيث:

ت٢١ = ٨٠-٦٦ = ١٤ ،   ت٢٢ = ٧٠-٥٧,٧٥ = ١٢,٢٥

ت٢٣ = ٥٠-٤١,٢٥ = ٨,٧٥

كا٢ المحسوبة = $\frac{(٦٥-٦٦)^٢}{٦٦}$ + $\frac{(٦٢-٥٧,٧٥)^٢}{٥٧,٧٥}$ + $\frac{(٣٨-٤١,٢٥)^٢}{٤١,٢٥}$

+ $\frac{(١٥-١٤)^٢}{١٤}$ + $\frac{(٨-١٢,٢٥)^٢}{١٢,٢٥}$ + $\frac{(١٢-٨,٧٥)^٢}{٨,٧٥}$ = ٣,٣٣٦.

من جدول توزيع كا٢ وعند درجات الحرية = (٣-١) (٢-١) = ٢

ولمستوى المعنوية ٠,٠٥ فإن: كا١٢ = ٠,١٠٦، كا٢٢ = ٧,٣٨

وحيث أن قيمة كا٢ المحسوبة تقع فى منطقة القبول، فنقبل H_0 أى يقبل الفرض الذى يقضى بأن قدرات المتدربين فى الأقسام الثلاثة متقاربة عند مستوى المعنوية ٥٪.

(٢-٢) إختبار كولومجروف سيمرنوف Kolomogrov Simrnov Test

لإجراء إختبار كا^{2} لجودة التوفيق - كما سبق أن رأينا - يلزم توافر شرطان أساسيان يحدان من استخدامه إلى حد كبير وهما:

١- أن يكون مجموع التكرارات أكبر من ٣٠.

٢- أن يكون التكرار المتوقع لأى خلية أكبر من أو يساوى ٥.

فإذا لم يتحقق الشرط الأول فيجب فى هذه الحالة إجراء إختبارات لامعلميه أخرى، ولعل من أهمها هو إختبار كولومجروف سيمرنوف لجودة توفيق دالة الإحتمال (أو دالة كثافة الإحتمال) والذى قدمه العالم كولومجروف فى عام ١٩٣٣ فى حالة عينة واحدة ثم قام بتطويره العالم سيمرنوف فى حالة وجود عينتين.

أما إذا لم يتحقق الشرط الثانى فإن الموقف - كما رأينا - يعالج بضم بعض الخلايا المتجاورة، إلا أننا فى المقابل نفقد درجة حرية عن كل عملية ضم، مما قد يؤدى إلى فقد كثير من درجات الحرية إلى درجة قد يتعذر معها إجراء إختبار كا^{2}، ويكون من الأنسب فى مثل هذه الحالات إستخدام إختبار كولومجروف سيمرنوف.

ويعتمد هذا الإختبار على دالة الإحتمال التجميعية للمتغير للتوزيع الإحصائى النظرى المقترح، والتى نرمز لها بالرمز د*(س)، ودالة الإحتمال التجميعية التجريبية للمتغير والمحسوبة من بيانات العينه، والتى نرمز لها بالرمز ع*(س)، حيث يدور الفرضين العدمى والبديل للإختبار حول هاتين الدالتين كما يلى:

الفرض العدمى: H_0 : د*(س) = ع*(س)

وهو يعنى أن بيانات العينة تتبع التوزيع النظرى المفترض

(بمعنى أن التوفيق جيد)

الفرض البديل: H_1 : د$^{\circ}$(س) ≠ ع$^{\circ}$(س)

وهو يعنى أن بيانات العينة لا تتبع التوزيع النظرى المفترض (بمعنى أن التوفيق ردئ).

ويجرى الإختبار وفقاً للخطوات التالية:

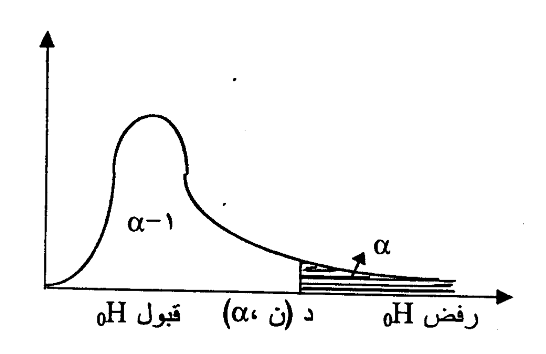
١- نحصل على دالة الإحتمال التجميعية التجريبية من بيانات العينه كالآتى:

$$ع^*(س) = ح(س \leq س) = \frac{\text{عدد المفردات فى العينه التى تقل عن أو تساوى س}}{ن}$$

ثم نحسب أكبر قيمة مطلقة للفرق بين دالة الإحتمال التجميعية التجريبية المحسوبة من بيانات العينه ونرمز لهذا الإحصاء بالرمز د وهو متغير عشوائى يتبع توزيع D، أى أن:

د = أكبر $|ع^{\circ}(س) - د^{\circ}(س)|$ وذلك لجميع قيم س

٢- عند مستوى المعنوية α وعند درجات الحرية ن نوجد القيمة د (ن، α) من جدول توزيع D والمسمى بجدول كولومجروف سيمرنوف -جدول رقم (٦) بالملحق- ونحدد بها منطقة القبول والرفض للفرض العدمى H_0 كما يلى:



شكل (٤)

٣- إذا وقعت قيمة الإحصاء د (أى د المحسوبة) فى منطقة القبول نقبل الفرض العدمى (H_0) والعكس.

مثال (٥)

ألقيت زهرة نرد ٢٤ مرة وكان عدد مرات ظهور كل وجه كما يلى:

الوجه (س)	١	٢	٣	٤	٥	٦	المجموع
عدد مرات الظهور	٣	٤	٥	١	٦	٥	٢٤

والمطلوب: إختبار الفرض القائل بأن نتائج رمى زهرة النرد متغير عشوائى يتبع التوزيع المنتظم (والذى يعنى أن زهرة النرد متزنة) بإستخدام إختبار كولومجروف سيمرنوف بدرجة ٩٥٪.

الحل

H_0 : نتائج رمى زهرة النرد متغير عشوائى يتبع التوزيع المنتظم.

H_1 : نتائج رمى زهرة النرد متغير عشوائى لا يتبع التوزيع المنتظم.

دالة الإحتمال للتوزيع المنتظم هى:

$$د(س) = \frac{١}{٦} \quad س = ١، ٢، ٣، ......،٦$$

وتكون دالة الإحتمال التجميعية للتوزيع المنتظم هى:

$$د^{*}(س) = ح(س \geq س) = \frac{س}{٦} \quad س= ١، ٢،٣، ......،٦$$

وفى ظل الفرض العدمى (H_0) فإن التكرار المتوقع لكل قيمة من قيم

المتغير $س = ن \times د(س) = ٢٤ \times \frac{١}{٦} = ٤$

أما دالة الإحتمال التجميعية المحسوبة من بيانات العينه وهى $ع^{*}(س)$

فتحسب كالآتى:

$$ع^{*}(س_ر) = \frac{\sum_{و=١}^{ر} ش_و}{\sum_{و=١}^{٦} ش_و}$$

فمثلاً:

$$ع^{*}(١) = ح(س \geq ١) = \frac{٣}{٢٤}$$

$$ع^{*}(٢) = ح(س \geq ٢) = \frac{٣ + ٤}{٢٤} = \frac{٧}{٢٤} \text{ وهكذا}$$

ولحساب قيمة الإحصاء د نكون الجدول التالى:

الوجه س	التكرار المشاهد ش	التكرار المتوقع ت	ع•(س)	د•(س).	| د•(س)- ع•(س) |
١	٣	٤	٢٤/٣	٢٤/٤	٢٤/١
٢	٤	٤	٢٤/٧	٢٤/٨	٢٤/١
٣	٥	٤	٢٤/١٢	٢٤/١٢	صفر
٤	١	٤	٢٤/١٣	٢٤/١٦	٣/٢٤
٥	٦	٤	٢٤/١٩	٢٤/٢٠	٢٤/١
٦	٥	٤	٢٤/٢٤	٢٤/٢٤	صفر
المجموع	٢٤	٢٤			

من العمود الأخير من الجدول نلاحظ أن د = $\frac{٣}{٢٤}$ = ٠,١٢٥

ومن جدول كولومجروف سيمرنوف وعند درجات الحرية ٢٤

ولمستوى المعنوية ٠,٠٥، نجد أن د (٢٤، ٠,٠٥) = ٠,٢٦٩.

وحيث أن قيمة د المحسوبة أقل من قيمتها الجدولية فنقبل الفرض العدمى H_0، أى نقبل الفرض القائل بأن نتائج الرمى تتبع التوزيع المنتظم بدرجة ثقة ٩٥٪.

ملحوظة: يلاحظ أنه لا يمكن إجراء إختبار جودة التوفيق للمثال السابق بإستخدام إختبار كا٢ وذلك لأن مجموع التكرارات أقل من ٣٠ كما أن التكرار المتوقع لكل خلية من خلايا الجدول يقل عن ٥.

مثال (٦)

إذا كانت قيمة الزيادة (+) والإنخفاض (–) فى سعر السـهم (بالجنيـه) فى شركة مطاحن شرق الدلتا على مدى ١٠ أيام كما يلى:

٣، ٢، –١,٨، ٤، ١، –٠,٦، –١,٥، ٤، ٣، –٢

إختبر مـا إذا كـانت البيانـات تتبـع التوزيـع الطبيعـى بتوقـع ٢,٥ وإنحراف معيارى ١,٥ بإستخدام إختبار كولومجروف سيمرنوف بدرجـة ثقة ٩٥٪.

الحل

H_0 : البيانات تتبع التوزيع الطبيعى بتوقع ٢,٥ وإنحراف معيارى ١,٥.

H_1 : البيانات لا تتبع التوزيع الطبيعى بتوقع ٢,٥ وإنحراف معيارى ١,٥.

ترتب قيم المتغير العشوائى س تصدعدياً ثم تقسم كل قيمة منها على مجمـوع التكـرارات فنحصـل علـى الإحتمـال المنـاظر ومـن هـذه الإحتمـالات نحصل على التوزيع الإحتمالى التجميعى من بيانات العينه ع°(س) كما يتضح من الجدول التالى:

س	التكرار المشاهد ش	ح (س)	ع°(س)	د°(س)	|د°(س)- ع°(س)|
–٢	١	٠,١	٠,١	٠,٠٠١٣	٠,٠٩٨٧
–١,٨	١	٠,١	٠,٢	٠,٠٠٢١	٠,١٩٧٩
–١,٥	١	٠,١	٠,٣	٠,٠٠٣٨	٠,٢٩٦٢
–٠,٦	١	٠,١	٠,٤	٠,٠١٩٢	٠,٣٨٠٨
١	١	٠,١	٠,٥	٠,١٥٨٧	٠,٣٤٣١
٢	١	٠,١	٠,٦	٠,٣٧٠٧	٠,٢٢٩٣
٣	٢	٠,٢	٠,٨	٠,٦٢٩٣	٠,١٧٠٧
٤	٢	٠,٢	١,٠٠	٠,٨٤١٣	٠,١٥٨٧
المجموع	١٠	١,٠٠			

دالة الإحتمال التجميعية د*(س) يتم حسابها بإستخدام جداول التوزيع الطبيعى المعيارى، فعلى سبيل المثال:

$$د^{*}(-٢) = ح (س \leq -٢) = ح (ص \leq \frac{-٢ - ٢,٥}{١,٥}) = ح (ص \leq -٣)$$

$$= ٠,٥ - ح (٠ \leq ص \leq ٣) = ٠,٥ - ٠,٤٩٨٧ = ٠,٠٠١٣$$

وكما يتضح من العمود الأخير بالجدول السابق فإن قيمة الإحصاء د= ٠,٣٨٠٨.

ومن جدول كولومجروف سيمرنوف وعند درجات الحرية ١٠ ولمستوى المعنوية ٠,٠٥ فإن د (١٠، ٠,٠٥) = ٠,٤٠٩.

وحيث أن قيمة د المحسوبة تقل عن قيمة د الجدولية، لذلك نقبل H_0 أى نقبل الفرض الذى يقضى بأن التغير فى أسعار أسهم شركة مطاحن شرق الدلتا يتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط ٢,٥ جنيه وإنحراف معيارى ١,٥ جنيه وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪.

من العرض السابق يتضح أن إختبار $كا^{٢}$ لجودة التوفيق مقيد بمجموعة من الشروط خاصة بمجموع التكرارات والتكرار المتوقع لكل خليه كما أنه يفضل إستخدامه فى حالة البيانات المبوبة أو الوصفيه، أما إختبار كولومجروف سيمرنوف لجودة التوفيق فهو غير مقيد بشروط ويفضل إستخدامه إذا كان حجم العينه صغيراً وكانت بياناتها غير مبوبة أو كمية أو أسمية معبراً عنها بصفر أو ١.

٣ إختبار العشوائية (أو الدورة) Test of Randomness

عندما يتم إختيار عينه من مجتمع ما لدراسة هذا المجتمع عن طريق تقدير معالمه والتعرف على أهم خصائصه وهو ما يعرف بالإستدلال الإحصائى، ولكى تكون عملية الإستدلال جيدة يجب أن تكون العينه قد أختيرت من المجتمع بطريقة عشوائية حتى تكون العينه ممثله للمجتمع تمثيلاً دقيقاً.

وإختبار العشوائية يعد أحد الإختبارات اللامعلميه الذى يستخدم فى إختبار ما إذا كانت العينه قد إختيرت بطريقة عشوائية أم لا. ويعتمد هذا الإختبار على متغير يطلق عليه إسم الدوره (Run)، حيث تعرف الدورة بأنها مجموعة من الأحداث المتشابهة التى يسبقها أو يتبعها نوع آخر مخالف من الأحداث أو لا يتبعها أو لا يسبقها أى أحداث، وعدد الأحداث داخل الدورة يطلق عليه طول الدورة وهو يعطى مؤشراً مبدئياً عن نتيجة الإختبار فعندما يكون طول الدوره كبيراً فإننا نشك فى عنصر العشوائية.

فإذا كان لدينا سلسلة من الإشارات الموجبة والسالبه ++ --- ++++ فإن هذه السلسلة تشتمل على ثلاث دورات الأولى للإشارات الموجبة وطولها = ٢ والثانيه للإشارات السالبه وطولها = ٣ والثالثة للإشارات الموجبة وطولها = ٤. بالمثل إذا كان لدينا مجموعة من الأفراد موزعين حسب النوع كما يلى: أنثى، ذكر، ذكر، أنثى، ذكر، فيوجد فى هذه الحالة أربع دورات وهكذا.

نفرض أن حجم العينه المختاره هو ن مفردة، فيتم تقسيمها إلى قسمين هما: $ن_1$ وتمثل عدد مرات ظهور الحدث الأول، $ن_2$ وتمثل عدد مرات ظهور الحدث الثانى، حيث ن = $ن_1$ + $ن_2$.

وتصاغ المشكلة فى هذه الحالة كما يلى:

نوع الإختبار	الفرض العدمى: H_0	الفرض البديل: H_1
A	العينة مسحوبة بطريقة عشوائيه.	العينة مسحوبة بطريقة غير عشوائية.
B	كما هو	العينة مسحوبة بطريقة غير عشوائية لوجود عدد قليل من الدورات.
C	كما هو	العينة مسحوبة بطريقة غير عشوائية لوجود عدد كبير من الدورات

ويجرى الإختبار وفقاً للخطوات التالية:

١- يتم تحديد عدد الدورات ونرمز له بالرمز و

وهنا يجب أن نفرق بين حالتين:

أولاً: إذا كان كلاً من $ن_1$، $ن_2$ أقل من ٢٠

٢- إذا كان الإختبار من النوع (A) فإنه يكون من جانبين ويستخدم الجدول رقم (٧) فى إيجاد قيمتين حرجيتين يمثلان حدين أدنى وأعلى بإستخدام $ن_1$، $ن_2$ α وليكونا $و_1$، $و_2$ على الترتيب، فإذا كانت قيمة و المحسوبة تقع بين الحدين $و_1$، $و_2$ نقبل الفرض العدمى والعكس.

أما إذا كان الإختبار من النوع (B) فإنه يكون من جانب واحد وبإستخدام $ن_1$، $ن_2$ α ومن جدول الحد الأدنى نستخرج القيمة الجدولية للحد

الأدنى، $و_1$، فإذا كانت قيمة و المحسوبة أقل من $و_1$ يرفض الفرض العدمى والعكس.

أما إذا كان الإختبار من النوع (C) فإنه يكون من جانب واحد أيضاً وبإستخدام $ن_1$، $ن_2$ α ومن جدول الحد الأعلى نستخرج **القيمة الجدولية** للحد الأعلى، $و_2$ ويرفض الفرض العدمى إذا كانت قيمة و المحسوبة أكبر من الحد الأعلى، $و_2$ والعكس.

ثانيا: إذا كان $ن_1$، $ن_2$ أيهما أو كلاهما أكبر من أو يساوى ٢٠.

فى هذه الحالة فإن التوزيع العينى للقيمة سيكون عبارة عن توزيع طبيعى بمتوسط $\mu_و$ وتباين $\sigma_و^2$ حيث:

$$\mu_و = \frac{٢ ن_1 ن_2}{ن_1 + ن_2} + ١$$

$$\sigma_و^2 = \frac{٢ ن_1 ن_2 \ (٢ ن_1 ن_2 - ن_1 - ن_2)}{(ن_1 + ن_2)^2 \ (ن_1 + ن_2 - ١)}$$

وعلى ذلك فإن القيمة ص = $\frac{و - \mu_و}{\sigma_و}$ **تتبع التوزيع الطبيعى المعيارى بمتوسط يساوى الصفر وتباين يساوى الواحد الصحيح.**

وبمقارنة قيمة ص بالدرجة المعيارية المقابلة لمستوى المعنوية $\frac{\alpha}{٢}$ (وذلك إذا كان الإختبار من النوع A) أو المقابلة لمستوى المعنوية α (وذلك إذا كان إختبار من النوع (B) أو (C)) المستخرجه من جدول التوزيع الطبيعى المعيارى يمكن قبول أو رفض العدمى.

مثال (٧)

إذا كانت درجات الحرارة المسجلة فى مدينة معينة خلال ٢٢ يوماً فى فصل الشتاء كما يلى:

-٨، -٣، ٥، -١، -٣، ٤، ٧، -٢، ٣، ٧، ٩، -١، -٥، ٣، -١، -٤،-٦، -٢، ٦، ٧، ٣، -٢.

والمطلوب: إختبار ما إذا كانت هذه العينه قد أختيرت بطريقة عشوائية أم لا؟ إستخدم درجة ثقة ٩٥٪.

الحل

H_0 : العينه مسحوبة بطريقة عشوائية.

H_1 : العينه مسحوبة بطريقة غير عشوائية.

من بيانات اليعنه نحصل على الإشارات المصاحبة كل مفردة كما يلى:

- - + - - + + - + + + - - + - - - - + + + -

ن١ (عدد المفردات ذات الإشارة الموجبه) = ١٠

ن٢ (عدد المفردات ذات الإشارة السالبه) = ١٢

و (عدد الدورات) = ١١

وحيث أن الإختبار من جانبين، فمن جدول (٧) وبإستخدام ن٢، ن١، $\frac{\alpha}{٢}$ أى ١٢، ١٠، ٠,٠٢٥ نستخرج الحدين الأدنى (و١) والأعلى (و٢) حيث و١= ٧ ، و٢ = ١٧.

وحيث أن قيمة و المحسوبة = ١١ تقع داخل الحدين ٧، ١٧ لذلك يتم قبـول الفـرض العدمـى (H_0)، أى أن العينـه مسـحوبة مـن المجتمـع بطريقـة عشوائية.

مثال (٨)

فى أحد إستطلاعات الرأى حول برنامج تليفزيونى معين أخذت عينــه من ٥٠ مشاهد أنقسموا ما بين مؤيد (د) ومعارض (ض) للبرنامج على النحــو التالى:

د، د، د، ض، ض، د، د، د، د، ض، ض، ض، ض، د، د، د، د، د، د، ض، ض، ض، ض، د، د، ض، د، د، د، د، د، ض، ض، د، د، ض، د، د، د، د، د، د، ض، ض، د، د، د، د.

بدرجة ثقة ٩٥٪ اختـبر   مـا إذا كـانت هـذه العينـه قـد إختـيرت مـن مجتمع الدراسة بطريقة عشوائية أم لا؟

الحل

H_0 : العينه إختيرت بطريقة عشوائية.

H_1 : العينه إختيرت بطريقة غير عشوائية.

إذا أعطى المؤيد (د) الإشارة + والمعارض (ض) الإشـارة - فتكـون الإشارات المصاحبة لمفردات العينه كالتالى:

-++--+++++-++----++++++--++++--++++

.++++ --+++++++

عدد المؤيديـن = ن١ = ٣٤، عـدد المعــارضين = ن٢ = ١٦، عــدد الدورات = و = ١٥.

وحيث أن $ن_١$ أكبر من ٢٠ فسوف يستخدم التقريب للتوزيع الطبيعى في إجراء الإختبار:

$$\text{متوسط و} = \mu_{و} = \frac{٢ن_١ن_٢}{ن_١ + ن_٢} + ١ = \frac{٢×٣٤×١٦}{٣٤ + ١٦} + ١ = ٢٢,٧٦$$

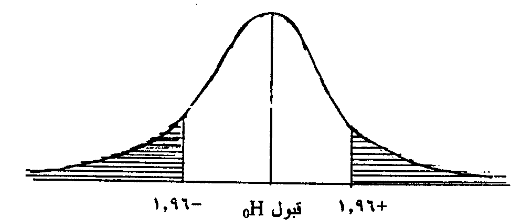
$$\text{تباين و} = \sigma_{و}^{٢} = \frac{٢ن_١ن_٢ (٢ن_١ن_٢ - ن_١ - ن_٢)}{(ن_١ + ن_٢)^٢ (ن_١ + ن_٢ - ١)}$$

$$= \frac{٢×٣٤×١٦ (٢×٣٤×١٦ - ٣٤ - ١٦)}{(٣٤ + ١٦)^٢ (٣٤ + ١٦ - ١)} = ٩,٢١٩$$

$$\sigma_{و} = \sqrt{٩,٢١٩} = ٣,٠٤$$

$$\text{الدرجة المعاريه} = \text{ص} = \frac{و - \mu_{و}}{\sigma_{و}} = \frac{١٥ - ٢٢,٧٦}{٣,٠٤} = -٢,٥٥$$

وحيث أن α = ٠,٠٥ والإختبار من جانبين فإن منطقة القبول والرفض للفرض العدمى (H_0) تكون كما يلى:



وحيث أن قيمة ص تقع فى منطقة الرفض، فنرفض H_0 ونقبل H_1 وهذا يعنى أن العينه قد أختيرت بطريقة غير عشوائية بدرجة ثقة ٩٥٪.

٤ إختبار مجموع الرتب لمان ويتنى Mann Whitney Test

إذا كان لدينا عينتين مستقلين إحداهما حجمها ن١ والأخرى حجمها ن٢ مسحوبتين من مجتمعين مختلفين فإن إختبار مان ويتنى يستخدم فى معرفة ما إذا كان المجتمعان اللذان سحبت منهما العينتان لهما نفس مقياس النزعة المركزية (أى لهما نفس الوسط الحسابى أو لهما نفس الوسيط وهكذا) بحيث يمكن إعتبار أن العينتين مسحوبتان من نفس المجتمع فيما يتعلق بمقياس النزعة المركزية أم لا.

ويعتبر هذا الإختبار من أقوى الإختبارات اللامعلميه الخاصة بالفرق بين مقياسين للنزعة المركزية ويمكن إستخدامه كبديل لإختبار ت المعلمى إذا لم تستوف شروط تطبيق إختبار ت.

وهذا الإختبار فضلاً عن أنه أكثر سهولة فى العمليات الحسابية فإنه يحتاج فقط إلى إفتراضات عامة عن المجتمعات التى تؤخذ منها العينات فهو يفترض أن يكون المتغير (أو المتغيرات) محل الدراسة مستمر ومقاس بمقياس ترتيبى على الأقل وأن دالة الإحتمال التجميعية للمجتمعين الذين سحبت منهما العينتان يختلفان فى قياس النزعة المركزية.

وتصاغ المشكلة فى هذه الحالة كما يلى:

نوع الإختبار	الفرض العدمى: H_o	الفرض العدمى: H_o
A	المجتمعان لهما نفس مقياس النزعة المركزية أو العينتان مسحوبتان من نفس المجتمع.	المجتمعان مختلفان معنوياً فى قياس النزعة المركزية أو العينتان مسحوبتان من مجتمعين مختلفين.
B	كما هو	مقياس المجتمع الأول $<$ مقياس المجتمع الثانى.
C	كما هو	مقياس المجتمع الأول $>$ مقياس المجتمع الثانى

ويجرى الإختبار وفقاً للخطوات التالية:

١- ندمج العينتين معاً فى عينه واحدة مع وضع علامة تميز مفردات العينة الأولى عن مفردات العينه الثانيه، ثم نرتب المفردات معاً من الأصغر إلى الأكبر مع إعطاء متوسط الرتب للمفردات المكررة.

٢- نحسب مجموع رتب مفردات العينه الأولى ونرمز له بالرمز $جـ_١$ ومنه نحسب الإحصاء ر، حيث:

$$ر = جـ_١ - \frac{ن_١ (ن_١+١)}{٢}$$

وإذا كانت $جـ_٢$ ترمز إلى مجموع رتب **مفردات العينه الثانيه فإن:**

$$ر = جـ_٢ - \frac{ن_٢ (ن_٢+١)}{٢}$$

وسوف نفرق بين حالتين:

أولاً: إذا كان كلاً من $ن_١$، $ن_٢$ أقل من ٢٠.

أ- إذا كان الإختبار على الصورة (A): فيكون الإختبار من جانبين ومن جدول مان ويتنى رقم (٨) وعند مستوى المعنوية $\frac{\alpha}{٢}$ وبإستخدام $ن_١$،$ن_٢$ نستخرج الحد الأدنى الجدولى وهو القيمة ر ($\frac{\alpha}{٢}$، $ن_١$،$ن_٢$) ثم نحسب الحد الأعلى الجدولى بطرح قيمة الحد الأدنى الجدولى من حاصل الضرب $ن_١$ $ن_٢$، أى أن:

$$الحد الأدنى = ر \left(\frac{\alpha}{٢}، ن_١، ن_٢\right)$$

$$الحدالأعلى = ن_١ ن_٢ - ر \left(\frac{\alpha}{٢}، ن_١، ن_٢\right)$$

فإذا وقعت قيمة ر المحسوبة بين الحدين الأدنى والأعلى نقبل الفرض العدمى، أما وقعت خارج هذين الحدين فنرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل.

ب- إذا كان الإختبار على الصورة (B): فيكون الإختبار من جانب واحد ومن جدول مان ويتنى بإستخدام α، $ن_1$، $ن_2$ نستخرج الحد الأدنى الجدولى ر (α، $ن_1$، $ن_2$)، فإذا كانت قيمة ر المحسوبة أصغر من الحد الأدنى نرفض الفرض العدمى والعكس.

جـ- إذا كان الإختبار على الصورة (C): يكون الإختبار من جانب واحد أيضاً، فمن جدول مان ويتنى وبإستخدام α، $ن_1$، $ن_2$ نستخرج الحد الأدنى الجدولى أى ر (α، $ن_1$، $ن_2$) ثم نحسب الحد الأعلى الجدولى حيث:

الحد الأعلى الجدولى = $ن_1 ن_2$ - ر (α، $ن_1$، $ن_2$)

فإذا كانت قيمة ر المحسوبة أكبر من الحد الأعلى نرفض الفرض العدمى والعكس.

ثانياً: إذا كان $ن_1$، $ن_2$ أحدهما أو كلاهما أكبر من ٢٠.

فى هذه الحالة يستخدم التقريب للتوزيع الطبيعى، حيث ثبت أن:

$$ص = \frac{ر - \mu_ر}{\sigma_ر}$$ يخضع للتوزيع الطبيعى المعيارى، حيث

$$\mu_ر = \frac{ن_1 ن_2}{٢}$$

$$\sigma_ر = \sqrt{\frac{ن_1 ن_2 (ن_1 + ن_2 + ١)}{١٢}}$$

وبناء على قيمة $\frac{\alpha}{2}$ (إذا كان الإختبار علىى الصورة A) أو قيمة α (إذا كـان الإختبـار علـى الصـورة B أو C) نحصـل القيمـة المعياريـة مـن جدول التوزيع الطبيعى المعيارى ونحدد بها منطقة القبـول والرفض للفرض العدمى ثم نقارن قيمة ص بالقيمة المعيارية: فإذا وقعت ص فى منطقة القبـول نقبل الفرض العدمى والعكس.

مثال (٩)

لمعرفة ما إذا كان هناك فرقاً معنوياً فى إستيعاب مادة الإقتصـاد بيـن طلاب القسم العلمى وطلاب القسم الأدبى أختيرت عينتان: الأولى مكونه من ١٠ طلاب من القسم العلمى والثانيه مكونـه مـن ٨ طـلاب مـن القسـم الأدبـى ممن درسوا مادة الإقتصاد وكانت درجاتهم كالآتى:

درجات طلاب العلمى	١٦	١٥	٩	١٨	١٤	١٧	١٠	١٢	٧	١٥
درجات طلاب الأدبى	١٤	١٢	١٠	٨	١٩	٦	١١	١٥		

إختبر الفرض القائل بأنه لا يوجد فـرق معنـوى بيـن متوسـط درجـة الطالب فى مادة الإقتصاد فى مجتمعى القسمين العلمـى والأدبـى بدرجـة ثقـة ٩٩٪.

الحل

H_0 : لا يوجد فرق معنوى بين متوسطى الدرجة فى المجتمعين.

H_1 : يوجد فرق معنوى بين متوسطى الدرجة فى المجتمعين.

ندمج بيانات العينتين معاً فى عينه واحـدة ثـم نرتـب المفـردات ترتيبـاً تصاعدياً مع تمييز مفردات كل من العينتين.

المفردة	العينه	الترتيب	رتب العينه الأولى
٦	٢	١	
٧	١	٢	٢
٨	٢	٣	
٩	١	٤	٤
١٠	١	٥,٥	٥,٥
١٠	٢	٥,٥	
١١	٢	٧	
١٢	١	٨,٥	٨,٥
١٢	٢	٨,٥	
١٤	١	١٠,٥	١٠,٥
١٤	٢	١٠,٥	
١٥	١	١٣	١٣
١٥	١	١٣	١٣
١٥	٢	١٣	
١٦	١	١٥	١٥
١٧	١	١٦	١٦
١٨	١	١٧	١٧
١٩	٢	١٨	
المجموع			١٠٤,٥

مجموع رتب العينه الأولى = $جـ_{١}$ = ١٠٤,٥.

ر المحسوبة = $جـ_{١} - \frac{ن_{١}(ن_{١}+١)}{٢} = ١٠٤,٥ - \frac{١٠(١١)}{٢} = ٤٩,٥$

من جدول مان ويتنى ينتج أن:

الحد الأدنى = ر $(\frac{\alpha}{٢}$، $ن_{١}$، $ن_{٢})$ = ر (٠,٠٠٥، ١٠، ٨) = ١٢

الحد الأعلى= ن $ن_{٢}$ − ر $(\frac{\alpha}{٢}$، $ن_{١}$، $ن_{٢})$ = ١٠(٨) − ١٢= ٦٨

وحيث أن قيمة ر المحسوبة تقع بين الحدين الأدنى والأعلى فنقبل الفرض العدمي ونؤيد الرأى القائل بأنه لا يوجد فرق معنوى بين متوسط درجة الطالب فى مادة الإقتصاد بين القسمين العلمى والأدبى بدرجة ثقة ٩٩٪.

مثال (١٠)

فى دراسة لمعرفة عمر الرجل عند الزواج إختيرت عينه عشوائيه من ٢٢ مصرياً وأخرى من ١٩ سعودياً وكانت أعمارهم عند الزواج كما يلى:

العمر عند الزواج للمصري	٢٦	٣١	٣٥	٢١	٢٨	٣٠	٢٧	٣١	٣٧	٢٥	٣٣	٢١	٢٧	٢٩	٣٤	٣٥	٢٦	٣٣	٣٤	٣٥	٣٢	٣٠
العمر عند الزواج للسعودى	٢٧	٣٠	٢٢	٢٦	٣١	٢٥	٣٠	٢٧	٢٣	٣١	١٧	٣٢	٢٥	٢٨	٢٦	٣٠	٢٢	٢١	٢٤			

أختبر الفرض القائل بأن مقياس النزعة المركزية لعمر الزواج للرجل فى جمهورية مصر العربية يزيد عنه فى المملكة العربية السعودية بدرجة ثقة ٩٥٪ مستخدماً إختبار مان ويتنى.

الحل

H_0 : مقياس النزعة المركزية لعمر الرجل عند الزواج متساوى فى جمهورية مصر العربية والمملكة العربية السعودية.

H_1 : مقياس النزعة المركزية لعمر الرجل عند الزواج فى جمهورية مصر العربية أكبر منه فى المملكة العربية السعودية.

ندمج بيانات العينتين معاً فى عينه واحدة ثم نرتب المفردات ترتيباً تصاعدياً ونحدد رتب العينه بشكل منفصل كما يتضح من الجدول التالى:

المفردة	الترتيب	العينه	رتب العينه الأولى	المفردة	الترتيب	العينه	رتب العينه الأولى
١٧	١	٢		٢٨	٢١,٥	٢	
٢٠	٢	٢		٢٩	٢٣	١	٢٣
٢١	٤	٢		٣٠	٢٥,٥	١	٢٥,٥
٢١	٤	١	٤	٣٠	٢٥,٥	١	٢٥,٥
٢١	٤	١	٤	٣٠	٢٥,٥	٢	
٢٢	٦,٥	٢		٣٠	٢٥,٥	٢	
٢٢	٦,٥	٢		٣١	٢٩,٥	١	٢٩,٥
٢٣	٨	٢		٣١	٢٩,٥	١	٢٩,٥
٢٤	٩	٢		٣١	٢٩,٥	٢	
٢٥	١١	١	١١	٣١	٢٩,٥	٢	
٢٥	١١	٢		٣٢	٣٢,٥	١	٣٢,٥
٢٥	١١	٢		٣٢	٣٢,٥	٢	
٢٦	١٤,٥	١	١٤,٥	٣٣	٣٤,٥	١	٣٤,٥
٢٦	١٤,٥	١	١٤,٥	٣٣	٣٤,٥	١	٣٤,٥
٢٦	١٤,٥	٢		٣٤	٣٦,٥	١	٣٦,٥
٢٦	١٤,٥	٢		٣٤	٣٦,٥	١	٣٦,٥
٢٧	١٨,٥	١	١٨,٥	٣٥	٣٩	١	٣٩
٢٧	١٨,٥	١	١٨,٥	٣٥	٣٩	١	٣٩
٢٧	١٨,٥	٢		٣٥	٣٩	١	٣٩
٢٧	١٨,٥	٢		٣٧	٤١	١	٤١
٢٨	٢١,٥	١	٢١,٥				

ومجموع رتب العينه الأولى = $ج_1$ = ٥٧٢.

وحيث أن حجم العينه الأولى يساوى ٢٢ مفرده (وهو أكبر من ٢٠) لذلك يفضل إجراء الإختبار بإستخدام تقريب التوزيع الطبيعى حيث:

$$ر = جـ_ر - \frac{ن_١(ن_١+١)}{٢} = ٥٧٢ - \frac{٢٢ \times ٢٣}{٢} = ٣١٩$$

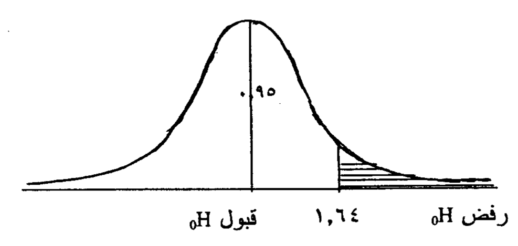
$$\mu_ر = \frac{ن_١ ن_٢}{٢} = \frac{٢٢ \times ١٩}{٢} = ٢٠٩$$

$$\sigma_ر = \sqrt{\frac{ن_١ ن_٢ (ن_١ + ن_٢ + ١)}{١٢}} = \sqrt{\frac{٢٢(١٩) (٢٢ + ١٩+ ١)}{١٢}}$$

$$= ٣٨,٢٥.$$

$$\text{الدرجة المعارية (ص)} = \frac{ر - \mu_ر}{\sigma_ر} = \frac{٣١٩ - ٢٠٩}{٣٨,٢٥} = ٢,٨٧٦.$$

وحيث أن مستوى المعنوية = ٠,٠٥ والإختبار من جانب واحد، فإن القيمة المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري تساوى ١,٦٤ وتكون منطقة القبول والرفض للفرض العدمى هى:



وحيث أن الدرجة المعيارية المحسوبة تساوى ٢,٨٧٦ وهى تقع فى منطقة الرفض، لذلك يرفض الفرض العدمى ويقبل الفرض البديل، أى يتم قبول الفرض الذى يقرر أن مقياس النزعة المركزية لعمر الرجل عند الزواج فى جمهورية مصر العربية يزيد عنه فى المملكة العربية السعودية بدرجة ثقة ٩٥٪.

البــــــاب الثانى

السلاسل الزمنيه

Time Series

١ تمهيد

تعرف السلسلة الزمنيه بأنها عبارة عن مجموعة من البيانات الرقميه لظاهرة معينه مسجله على مدى فترات زمنيه متعاقبه طويله نسبياً بحيث تكون وحدة الفترة الزمنيه ثابته، هذه الفترات الزمنيه قد تكون باليوم أوبالأسبوع أو بالشهر أو بالربع سنه أو بالسنة الكامله. ومن أمثلة السلاسل الزمنيه درجات الحراره اليوميه المسجله خلال شهر معين من شهور السنه، حجم المبيعات الأسبوعية لأحد المحال التجاريه لعدد من الأسابيع، حجم الودائع والمدخرات فى أحد البنوك خلال عدة سنوات، أعداد الطلاب المقبولين سنوياً فى أنواع التعليم المختلفه على مدى عدة سنوات. وبذلك فإن السلاسل الزمنيه تعتبر إحدى الوسائل التى تستخدم لوصف العلاقه بين ظاهرتين (أو متغيرين) أحدهما هو الزمن.

وتعتبر دراسة السلاسل الزمنيه من الموضوعات الهامه لرجال الأعمال والباحثين فى فروع العلوم المختلفه بصفة عامه وللإقتصاديين بصفة خاصه، وترجع هذه الأهمية إلى أن دراسة السلاسل الزمنيه تفيد فى تقديم الطرق الإحصائيه التى تمكن من توصيف مسار الظاهرة فى الماضى ثم قياس التغيرات المختلفه التى تطرأ على هذا المسار بفعل المؤثرات المختلفه – سواء كان نحو الزيادة أو النقصان – والإستفاده من مثل هذا القياس فى

التنبؤ بقيم الظاهرة (أو المتغير) فى المستقبل، وهذا بدوره يمكـن مـن الأغلب الأعم من الحالات من وضع السياسات وإتخاذ الإجراءات اللازمه فى الوقت المناسب لتصحيح مسار الظاهرة محل الدراسة.

وجدير بالذكر أن قيمة الظاهرة (أو المتغير) فـى نقطـة زمنيـة معينـه إنمـا يكـون عرضــه لتفـاعل العديـد مـن المؤثـرات والعوامـل الإقتصاديـه والإجتماعيه والنفسيه والمناخيه ...... الخ بحيث يصعب معها فصل أى منهـا بدقه لدراسته على حده، ويتضـح ذلـك بجـلاء فـى الظواهـر الإقتصاديـه مثـل تطور عدد السكان، الإنتاج، العماله، الدخل، الأسعار، الصــادرات والـواردات وهكذا. ومن ثم يتطلب الأمر إستخدام أساليب احصائيه أكثر تقدمـاً فـى مجـال الإقتصاد القياسى.

٣ مركبات السلسلة الزمنيه

تخضع أى سلسلة زمنيه لظاهرة ما فى تكوينها لمجموعـة مـن القـوى أو المركبات المعقدة والمتداخله التى تحدد قيمة الظاهرة بمـرور الزمـن، وقـد أتفق على أن التغير فى السلسـله الزمنيـه يمكـن اخضاعـه لأربعـه أنـواع مـن المركبات الأساسيه وهى:

(أ) الإتجاه العام — Secular Trend

(ب) التغيرات الموسميه — Seasonal Variations

(جـ) التغيرات الدورية — Cyclical Variations

(د) التغيرات العشوائية (غير المنتظمه) Random (or Irregular) Variations

وسوف نتناول بالتفصيل كل من هذه المركبات على حده.

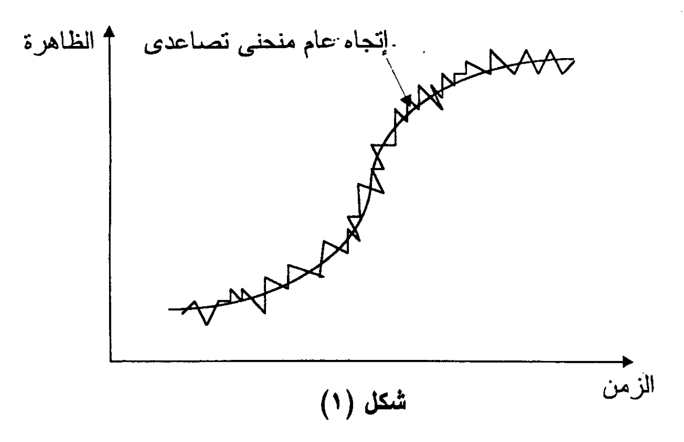
(أ) الإتجاه العام Secular Trend

يعتبر الإتجاه العام من أهم مكونات السلسله الزمنيه، ويقصد بالإتجاه العام للظاهرة ميل الظاهرة التى تمثلها السلسله الزمنيه للصعود أو للهبوط أو للثبات على مدار فترة طويله من الزمن، فبالرغم من وجود تقلبات وقتيه فى الظاهرة، إلا أن الظاهرة تخضع دائماً لإتجاه عام نحو الصعود أو الهبوط أو الثبات وتستمر فى ذلك مدة طويلة، ويوضح هذا الإتجاه المجال العام لتطور الظاهرة ويكون نموذجاً لما يطرأ عليها من تغيرات يدل على درجة نموها وأتجاهها.

والتغيرات التى ينتج عنها الإتجاه العام تحدث غالبا بشكل تدريجى وفى اتجاه واحد لمدة طويله، وقد يحدث فى بعض الأحيان أن يتغير الإتجاه العام للظاهرة إلا أن ذلك لا يحدث إلا بعد فتره طويله وبعد حدوثه يظل فى الإتجاه الجديد لفترة طويله أيضا.

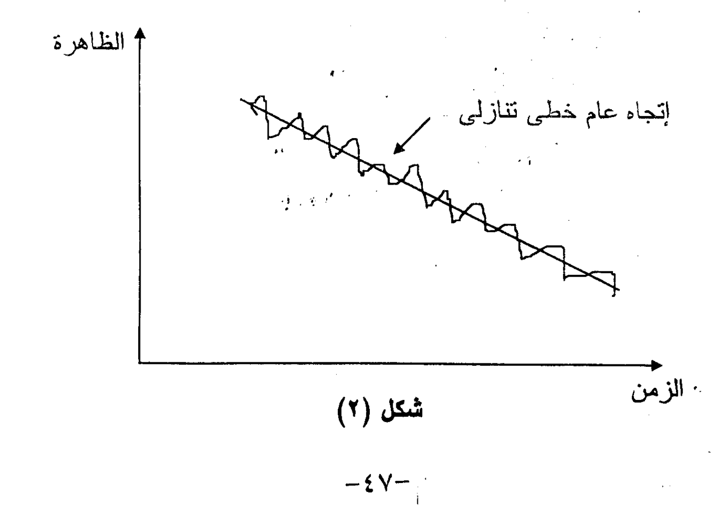
ومن أمثلة الإتجاه العام أن هناك اتجاهاً عاماً لزيادة الأسعار العالميه، عدد السكان، حجم العماله، استخدام الحاسبات الآليه ..... الخ على مدار الزمن. كما أن هناك اتجاهاً عاماً لنقص معدل الوفيات وخسائر الشركات على مدار الزمن.

والنموذج الذى يمثله الإتجاه العام قد يأخذ شكل الخط المستقيم أو المنحنى وقد يكون متجهاً إلى أعلى أو إلى أسفل، والنموذج المتجه إلى أعلى يمثل إتجاها عاماً تصاعدياً يمثل أثر العوامل المختلفه التى تعمل على زيادة قيمة الظاهرة بمرور الزمن كما يتضح من شكل (١)



شكل (١)

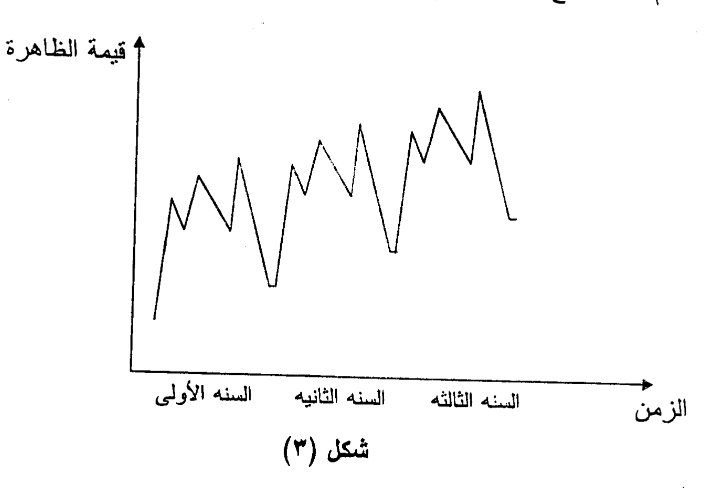
أما إذا كان الإتجاه العام للظاهرة متجها إلى أسفل فإنه يعكس اتجاها عاماً تنازليا يمثل أثر العوامل المختلفه التى تؤدى إلى نقص قيمة الظاهرة بمرور الزمن كما يتضح من شكل (٢)



شكل (٢)

(ب) التغيرات الموسميه Seasonal Variations

التغيرات الموسمية هى تغيرات منتظمة قصيرة الأجل تتأثر بها الظاهرة خلال فترات زمنيه أو مواسم معينه على مدى العام ولها صفة الدوريه سنوياً بمعنى أن هذه التغيرات تتكرر وتستعيد سيرتها الأولى كل سنه فى نفس الفترة بطريقه روتينيه وليس لها صفة التراكم كما فى حالة الإتجاه العام كما يتضح من الشكل (٣)



شكل (٣)

وبالرغم من تسمية هذه التغيرات بالتغيرات الموسميه، إلا أنه ليس بالضرورة أن تكون الفترة الزمنيه موسم من مواسم السنه، فقد تكون الفترة الزمنيه أسبوعاً أو شهراً أو ربع سنه أو أى وحدة زمنيه أخرى تتطلبها الدراسة بشرط ألا يزيد طول الدوره المتكرره عن سنه واحده على الأكثر. فإذا كانت الفترة الزمنيه أسبوعاً ظهرت التقلبات الموسمية فى أيام معينه دون

الأخرى، وإذا كانت شهراً تظهر التقلبات الموسميه خلال أيام وأسابيع معينه دون الأخرى وهكذا.

وترجع التغيرات الموسميه لأسباب عديدة منها فصول السنه وما يتبعها من تغيرات مناخيه تؤثر فى إنتاج وأسعار الحاصلات الزراعية مثلاً، مواعيد الأجازات والأعياد وعادات وتقاليد المجتمع التى تؤثر على عادات الإستهلاك وبالتالى التأثير على المبيعات مثلاً .... الخ.

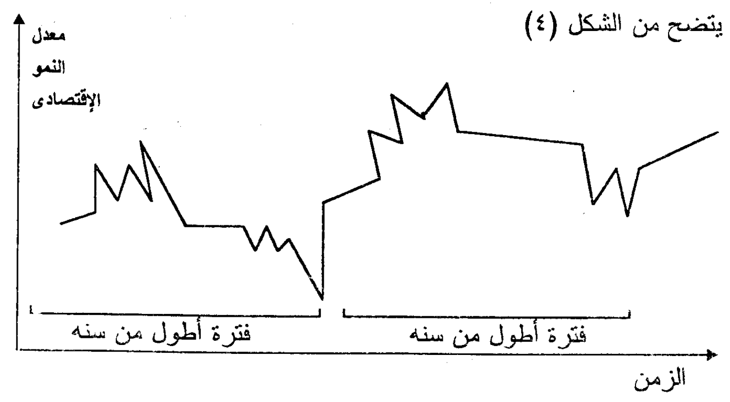
ومن أمثلة التغيرات الموسمية زيادة حجم الإيداعات بالبنوك فى شهور الصيف من كل عام بسبب عودة العاملين بالخارج لقضاء أجازاتهم، كما أن أسعار السلع الزراعية تكون دائماً منخفضه فى الأشهر التى تتوافر خلالها السلعه بكثرة وتكون مرتفعه عندما يندر عرض السلعه أو فى غير موسمها مما يظهر تغيرات الأسعار فى صوره دوريه منتظمة، كما تزداد الكميه المستهلكه من السكر خلال شهر ربيع الأول من كل عام بسبب الإقبال على شراء الحلوى بمناسبة المولد النبوى الشريف.

وتحليل السلاسل الزمنيه للتعرف على التغيرات الموسميه له أهمية خاصه حيث أن تخطيط الإنتاج أو توقيت الإعلان عن السلع أو التوسع فى المشروعات المختلفه يعتمد إلى حد كبير على البيانات الإحصائيه للتغيرات الموسميه، وفى بعض الظواهر تكون التغيرات الموسميه ذات أهمية ثانويه إلا أن تقديرها يفيد فى أكتشاف وقياس أنواع التغيرات الأخرى التى تتعرض لها الظاهرة.

(جـ) التغيرات الدوريه Cyclical Variations

التغيرات الدورية هى التغيرات التى تحدث أثرها بفعل تتابع فترات الرواج والكساد على مدار فترات أطول بكثير من السنه الواحده، وهى تشبه التغيرات الموسميه من حيث أنها تتكرر بصورة منتظمة وتستعيد سيرتها على مدار تلك الآجال الطويله إلا أن مدة الدورة تكون أكبر بكثير منها فى حالة التغيرات الموسميه، فقد تستغرق الدوره الواحده عشر سنوات، كما أن الدورات المتتاليه قد تختلف فى الطول أو الحدة أو التباعد عن بعضها ولهذا يصعب التنبؤ بها.

ومن أمثلة التغيرات الدورية موجات الرواج أو الكساد التى يتعرض لها الإقتصاد الوطنى لدولة ما، حيث يشهد الإقتصاد سنوات رخاء يرتفع فيها معدل النمو الإقتصادى وسنوات كساد ينخفض فيها معدل النمو الإقتصادى ثم الإنتعاش مرة أخرى حيث تتكرر الدوره بعد عدد معين من السنوات كما يتضح من الشكل (٤)



شكل (٤)

مثل هذه التغيرات الإقتصادية تنشأ بسبب عوامل إقتصاديه عامه تعتمد على النظريات العلميه الإقتصادية كنظرية الدخل ونظرية الإستهلاك ونظرية الإنتاج ...... الخ وليس إلى العوامل المناخيه أو العادات الإجتماعية وغيرها من مسببات التغيرات الموسميه.

(د) التغيرات العشوائيه (أو الغير منتظمة)

Random (or Irregular) Variations

التغيرات العشوائيه فى السلسله الزمنيه هى التغيرات التى تحدث للظاهرة نتيجة عوامل عارضه تعتمد على الصدفه البحته كفترات الإنتخابات أو الزلازل أو الحروب أو الفيضانات أو إفلاس البنوك أو الحرائق وغيرها من العوامل التى تحدث بشكل فجائى عشوائى مما يجعل من الصعب التنبؤ بوقوعها أو بتأثيرها، ومما يميز هذه التغيرات أنها لا تستمر طويلاً وقد تتكرر أو لا تتكرر وتحدث مفعولها أحياناً بالزيادة فى قيمة الظاهرة وأحياناً أخرى بالنقص، لذا يطلق على هذه التغيرات أحياناً التغيرات العشوائيه قصيرة الأجل.

وفى بعض الأحيان يمكن التعرف على بعض هذه التغيرات وتبرير ارتباطها بالتغيرات السياسيه أو الإقتصادية أو الإجتماعية أو المناخيه التى تحدثها وبذلك يمكن التخلص من تأثيرها على بيانات الظاهرة قبل تقدير الإتجاه العام أو التغيرات الموسميه أو التغيرات الدوريه.

وكما أوضحنا آنفا فإن التغير فى بيانات السلسله الزمنيه يعتبر نتاج تفاعل المركبات التى تعزى إلى مسببات الإتجاه العام والتغيرات الموسميه والدوريه والعشوائيه، لذلك يهتم الباحثون بدراسة كل من هذه المركبات على

حده، حيث يبدأون بقياس أثر كل منها قياساً رقيما، إما لإهتمامهم بهذا المؤثـر فـى حد ذاتـه لكـى يتـم تخليص الظـاهرة الأصليـة منـه للتعـرف علـى تـأثير التغيرات الأخرى على الظاهرة أو للإستفادة من هذا المؤثر وذلك بتقليل أثـره على الظاهرة فى المستقبل. وإن كـان هنـاك شـبه اتفـاق بيـن البـاحثين بصفـة عامه والإقتصاديين بصفة خاصه بأن الحدود الفاصله بين تلك التغيرات غير واضحه لدرجة أن البعض يعتقد بوجود أكثر من أربعة أنـواع مـن المركبـات المؤثره فى تقلبات السلاسل الزمنيه، كما يرى البعض أنه فى الإمكـان إدمـاج تأثير بعض هذه العوامل معاً أو تقسيمها فــى أى واحـده مـن الطـرق المختلفـه والعديده لقياس تأثير مركبات السلسله الزمنيه.

٣ نـماذج السلاسل الزمنيه.

رأينـا أن السلسـلة الزمنيـه لظـاهرة مـا هـى إلا نتـاج تفـاعل الأنــواع الأربعة من التغيرات السابق ذكرها، فإذا اعتبرنا الرموز التاليه:

القيمة المشاهدة للظاهرة فى الفترة الزمنيه رقم ر = صر

الإتجاه العام	= جـ
التغيرات الموسميه	= م
التغيرات الدوريه	= د
التغيرات العشوائيه	= ع

فإن التفاعل بين مركبات التغير (جـ ، م ، د ، ع) والقيـم المشـاهدة (ص) فـى السلسله يتم بطرق مختلفه حسب نمـاذج معينـه تـأخذ عـادة إحدى الصورتيـن الآتيتين:

١- النموذج التجميعى

ويفترض أن قيمة الظاهرة ناتجه عن حاصل جمع التغيرات الأربع السابقه، أى أن:

ص ر = جـ + م + د + ع

ويعتبر هذا النموذج هو الأفضل لتمثيل الظاهره إذا كانت انحرافات القيم المشاهده للظاهرة عن القيم الإتجاهيه لها تقريبا مقدار ثابت.

٢- النموذج الضربى

ويفترض هذا النموذج أن قيمة الظاهرة فى أى فترة زمنيه عبارة عن حاصل ضرب التغيرات الأربع سالفة الذكر، أى أن:

ص ر = جـ × م × د × ع

ويعد هذا النموذج هو الأفضل لتمثيل الظاهرة إذا كانت نسبة القيم المشاهدة للظاهرة إلى القيم الإتجاهيه لها تقريبا مقدار ثابت.

٤ تحليل الإتجاه العام

ذكرنا أن تغيرات الإتجاه العام للظاهرة سواء كانت تصاعديه أو تنازليه إنما تعكس تطور الظاهرة على مدار فترة طويلة من الزمن، وهذه التغيرات تكون فى صورة خط مستقيم أو منحنى، وسوف نعرض للإتجاهات العامه التى يمكن تمثيلها بخطوط مستقيمه والإتجاهات العامه التى يتم تمثيلها بمنحنيات.

أولاً: طرق قياس الإتجاه العام الخطى

يوجد عدة طرق لتقدير الإتجاه العام الخطى للسلسلة الزمنيه وهى:

- طريقة التمهيد باليد.

- طريقة شبه المتوسطات.
- طريقة المتوسطات المتحركه.
- طريقة المربعات الصغرى.

وسوف نتناول فى الجزء التالى كل طريقة من هذه الطرق بشئ من التفصيل.

(٤-١) طريقة التمهيد باليد

تتلخص هذه الطريقه فى تمثيل قيم الظاهرة بالسلسله الزمنيه بيانياً حيث تمثل الوحدات الزمنيه على المحور الأفقى وقيم الظاهرة المناظره على المحور الرأسى ونقوم برصد أزواج القيم (الفترة الزمنيه وقيمة الظاهرة المناظرة) على الرسم البيانى فنحصل على ما يسمى بشكل الإنتشار للظاهرة وهو يعطى بلا شك صورة واضحه عن الإتجاه العام للظاهرة صعوداً أو هبوطاً أو ثباتاً، ثم نقوم بتوفيق خط مستقيم يمر بأكبر عدد من نقط الإنتشار ويمر باتزان بين باقى النقط التى لايمر بها (أى يتوسط شكل الإنتشار) كما يتضح من الشكل (٥)، هذا الخط المستقيم يمثل خط الإتجاه العام.

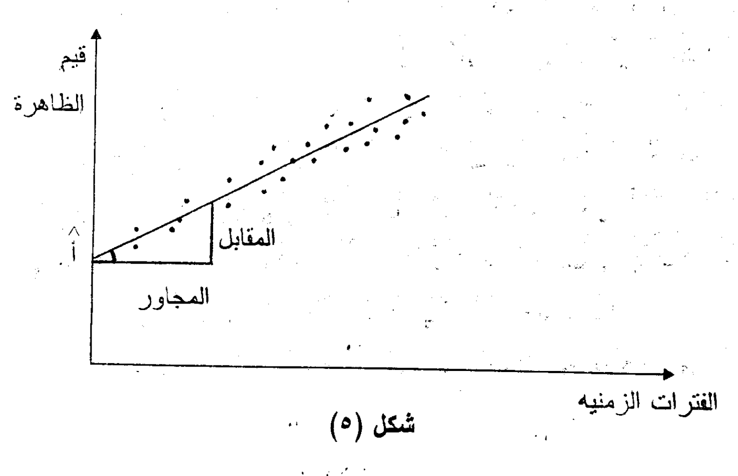
وبعد رسم خط الإتجاه العام يمكن إيجاد معادلته بسهوله والتى تأخذ الصورة:

$$\hat{ص}_ر = \hat{أ}_. + \hat{أ}_١ \, س_ر \quad (ر = ١، ٢، ٣، ...، ن)$$

حيث : $\hat{ص}_ر$ تمثل القيمة الإتجاهية للظاهره فى الفترة الزمنية رقم ر.

$\hat{أ}_٠$ عبارة عن قيمة الظاهرة عندما س تساوى الصفر (أى عند أولى فترات السلسلة الزمنية) وهى عبارة عن طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

$\hat{أ}_١$ عبارة عن ميل الخط المستقيم بالنسبة للمحور الأفقى أو أى محور يوازيه وهو يساوى ظل الزاوية التى يصنعها الخط المستقيم مع المحور الأفقى والذى يساوى خارج قسمة المقابل على المجاور.



شكل (٥)

وتتميز هذه الطريقة بأنها أسهل طرق قياس الإتجاه العام، إلا أنها فى نفس الوقت أكثرها بدائيه وأقلها دقة وموضوعية، فرسم مثل هذا الخط باليد عملية تقريبيه ويمكن أن نحصل على خطوط مختلفه بإختلاف الأشخاص العارضين وبالتالى لا يمكن استخدامه فى قياس الإتجاه العام للظاهرة.

مثال (١)

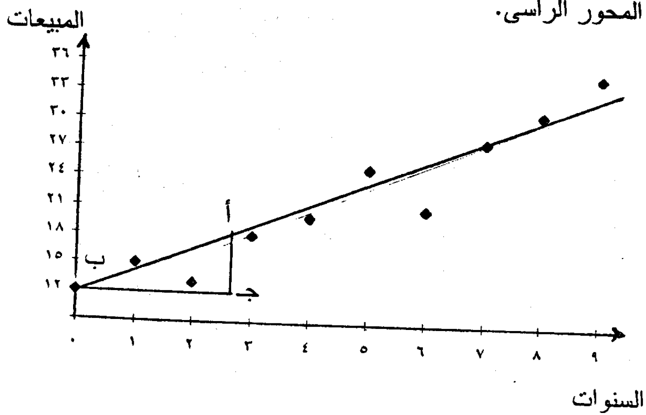
الجدول التالى يبين قيمة المبيعات (بالمليون جنيه) بأحد المصـانع فـى الفتره من ١٩٨٨ حتى ١٩٩٧.

السنوات	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧
قيمة المبيعات	١٢	١٥	١٣	١٨	٢٠	٢٥	٢١	٢٨	٣١	٣٥

والمطلوب تحديد معادلة خط الإتجاه العام لمبيعات المصنع مستخدماً طريقة التمهيد باليد.

الحل

نقوم برسم بيانـات السلسله فى شـكل انتشـار حيث س عبـارة عـن سنوات السلسله وتمثل على المحـور الأفقـى وتـأخذ القيـم ٠ ،١، ٢، ٣،..... حيث (٠) يمثل السنه الأولى وهى سنة ١٩٨٨ وهى تعتبر بذلك سنة الأساس، (١) يمثل السنة التاليه وهى سنة ١٩٨٩ .... وهكذا، ثم نمثل قيم المبيعـات على المحور الرأسى.



وكما هو واضح من الرسم فإن شكل الإنتشار يأخذ اتجاها خطياً متزايداً ونحاول رسم خط مستقيم يتوسط نقط الإنتشار قدر الإمكان كما هو مبين. ومن الرسم نجد أن $أ_.$ = ١٢ وهى عبارة عن الجزء المقطوع من محور الصادات وهى تمثل القيمة الإتجاهيه للمبيعات عندما س = صفر، أما $أ_١$ فهى عبارة عن ميل الخط المستقيم ويحسب كما يلى:

من أى نقطة اختيارية تقع على الخط المستقيم ولتكن النقطة أ نسقط عموداً على المحور الأفقى، ومن نقطة تقاطع الخط المستقيم مع المحور الرأسى ولتكن النقطة ب نرسم خطاً أفقيا يوازى المحور الأفقى فيلتقى مع العمود النازل فى نقطة ولتكن جـ، ومن ثم فإن:

$$\hat{أ}_١ = \frac{أ\ جـ}{ب\ جـ} = \frac{١,٦}{٤} = ٠,٤$$

وتكون معادلة خط الإتجاه العام هى :

$ص^\wedge_ر = ١٢ + ٠,٤\ س_ر$

(وذلك بإعتبار أن سنة ١٩٨٨ تمثل سنة الأساس وقيم (س) مقاسه بوحدات سنة واحده ووحدة قياس الظاهرة (ص) بالمليون جنيه)، وكما يظهر من الرسم فإن قيمة الظاهرة عندما س = صفر (أى فى سنة ١٩٨٨) تساوى ١٢ وأن هذه القيمة تزيد بمقدار ٠,٤ كل سنة وهذه الزيادة السنوية يمكن اعتبارها معدل التغير السنوى فى قيمة المبيعات فى المتوسط. وواضح أنه بالتعويض عن قيمة س المناسبة يمكن الحصول على القيمة الإتجاهية للظاهرة، فعلى سبيل المثال يمكن تقدير قيمة المبيعات بالمصنع فى عام ١٩٩٩ وذلك

بالتعويض فى معادلة الخط المستقيم عن س = ١١ (س = ١٩٩٩ - ١٩٨٨)

حيث:

ص̂ ر = ١٢ + ٠,٤ (١١) = ١٦,٤ مليون جنيه.

(٤-٢) طريقة شبه المتوسطات

وتعد هذه الطريقة أفضل - بعض الشئ - من طريقة التمهيد باليد للحصول على خط الإتجاه العام، وتتميز بسهولة تطبيقها إلا أنها تقريبيه إلى حد كبير حيث يتم الإكتفاء بنقطتين فقط لتمثيل المجموعه كلها.

وتتلخص هذه الطريقة فى الخطوات التاليه:

(أ) تقسم السلسله الزمنيه إلى فترتين متساويتين، وفى حالة وجود عدد فردى من الفترات الزمنيه نتجاهل الفترة الزمنيه الأولى أو الوسطى من السلسله لكى يكون عدد الفترات الزمنيه زوجياً ويمكن بالتالى تقسيمها إلى فترتين متساويتين.

(ب) نوجد مجموع قيم الظاهرة فى كل فترة من الفترتين ومنه نوجد متوسط قيم الظاهرة وذلك بقسمة مجموع قيم الظاهرة فى كل فترة على عدد القيم بالفترة.

(جـ) نعرف النقطتين: النقطة الأولى (س١ ، ص١) حيث ص١ عبارة عن الوسط الحسابى لقيم الظاهرة فى الفترة الزمنيه الأولى والذى تم حسابه فى الخطوه (ب)، وفى حين أن س١ هو منتصف الفترة الزمنيه الأولى، النقطة الثانيه (س٢ ، ص٢) حيث ص٢ عبارة عن الوسط الحسابى لقيم الظاهرة فى الفترة الثانيه بينما س٢ هو منتصف الفترة الزمنيه الثانيه.

(د) نمثل النقطتين فى رسم بيانى بحيث يكون الزمن على المحور الأفقى وقيم الظاهرة على المحور الرأسى ثم نرسم خطاً مستقيماً يصل بين هاتين النقطتين وهو يمثل خط الإتجاه العام لبيانات الظاهرة كلها والذى يمكن إيجاد معادلته بنفس الطريقة التى اتبعناها عند ايجاد معادلة خط الإتجاه العام عند إستخدام طريقة التمهيد باليد والتى تأخذ الصورة:

$$\hat{ص}_{ر} = أ_{.} + أ_{١} س_{ر}$$

حيث: $أ_{.}$ يمثل الجزء المقطوع من محور الصادات ، $أ_{١}$ يمثل ميل الخط المستقيم.

وفقا لطريقة شبه المتوسطات يمكن ايجاد معادلة خط الإتجاه العام مباشرة بطريقة جبريه كما يلى:

بفرض أن معادلة خط الإتجاه العام هى:

$$\hat{ص}_{ر} = أ_{.} + أ_{١} س_{ر}$$

فإن:

$$أ_{١} = \frac{\text{الفرق بين الوسط الحسابى للفترتين الزمنيتين}}{\text{الفرق بين زمنى الوسطين الحسابيين}}$$

$أ_{.}$ = الوسط الحسابى لقيم الظاهرة فى أى من الفترتين

أى أن:

$أ_{.} = ص_{١}$ وذلك بإعتبار أن $س_{١}$ تمثل فترة الأساس أو نقطة الأصل

أو

$أ_{.} = ص_{٢}$ وذلك بإعتبار أن $س_{٢}$ تمثل فترة الأساس أو نقطة الأصل.

ومعنى هذا أنه يمكن فى هذه الحاله أن نحصل على معادلتين لخط الإتجاه العام مختلفتين فى الجزء المقطوع من محور الصادات ($\hat{أ}$)، إلا أن كلا المعادلتين سوف يؤدى إلى الحصول على نفس القيمة الإتجاهية للظاهرة فى أى فترة زمنيه.

ويعاب على طريقة شبه المتوسطات أنها لا تصلح لقياس الإتجاه العام إلا للظواهر التى يمثلها خطوط مستقيمه فى حين يوجد الكثير من الظواهر التى يمثلها منحنيات، كما أن هذه الطريقه تعتمد - كما سبق أن أوضحنا - على الوسط الحسابى لكل فترة زمنيه، والوسط الحسابى كما نعرف يتأثر بشدة بالقيم المتطرفه أو الشاذه، كذلك ترانا قد تجاوزنا الدقه التامه عندما يكون عدد فترات السلسله الزمنيه فردياً حيث نتجاهل قيمة الظاهرة فى أحد هذه الفترات حتى يتسنى تقسيم السلسله الزمنيه إلى قسمين متساويين خصوصاً إذا كانت السلسله الزمنيه قصيرة جداً.

مثال (٢)

الجدول الآتى يبين عدد المترددين (بالألف) سنوياً على الوحدات الصحية بأحد مراكز محافظة الشرقيه:

السنه	١٩٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦
عدد المترددين	٥٠	٥٣	٥٨	٦٠	٦٣	٦٥	٦٢	٦٨	٦٥	٧٠	٧٣

والمطلوب:

١- تقدير معادلة خط الإتجاه العام باستخدام طريقة شبه المتوسطات جبريا وبيانيا.

٢- تقدير القيمة الإتجاهية لعدد المترددين على الوحدات الصحية سنة ١٩٩٨.

الحل

طريقة شبه المتوسطات تقتضى أن يكون عدد سنوات السلسله الزمنيه زوجياً حتى يمكن تقسيم السلسله إلى فترتين متساويتين، وحيث أن عدد سنوات هذه السلسله يساوى ١١ أى عدد فردى، فسوف نحذف السنه الوسطى وهى سنة ١٩٩١، ويكون طول كل فترة هو خمس سنوات. ومن ثم فإن مجموع (وبالتالى متوسط) قيم الظاهرة للفترة الزمنيه الأولى (أى ص١) سوف يوضع فى منتصف هذه الفترة، أى فى مواجهة سنة ١٩٨٨، كما أن مجموع (وبالتالى متوسط) قيم الظاهرة للفترة الزمنيه الثانيه (أى ص٢) سوف يوضع فى منتصف هذه الفترة فى مواجهة سنة ١٩٩٤ كما يتضح فى الجدول التالى:

السنه	عدد المترددين (ص)	مجموع كل قسم	متوسط كل قسم
١٩٨٦	٥٠		
١٩٨٧	٥٣		
١٩٨٨	٥٨	٢٨٤	٥٦,٨
١٩٨٩	٦٠		
١٩٩٠	٦٣		
١٩٩٢	٦٢		
١٩٩٣	٦٨		
١٩٩٤	٦٥	٣٣٨	٦٧,٦
١٩٩٥	٧٠		
١٩٩٦	٧٣		

أولاً: تقدير معادلة خط الإتجاه العام جبرياً:

معادلة خط الإتجاه العام تأخذ الصورة:

$$ص_ر = \hat{أ}_. + \hat{أ}_١ س_ر$$

حيث:

$$\hat{أ}_١ = \frac{\text{الفرق بين الوسطين الحسابيين للفترتين}}{\text{الفرق بين زمنى الوسطين الحسابيين}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{٦٧,٦ - ٥٦,٨}{١٩٩٤ - ١٩٨٨} = \frac{١٠,٨}{٦} = ١,٨$$

فإذا اعتبرنا $\hat{أ}_.$ هو المتوسط ٥٦,٨، فإن نقطة الأصل فى هذه الحالة تكون هى السنه المناظره لهذا المتوسط أى ستكون سنة ١٩٨٨ وتكون معادلة خط الإتجاه العام هى:

$$ص_ر = ٥٦,٨ + ١,٨ س_ر \quad (١)$$

(على أساس أن سنة ١٩٨٨ هى سنة الأساس أو نقطة الأصل، ووحدة قياس س سنة واحدة، ووحدة قياس الظاهرة (ص) بالألف).

أما إذا اعتبرنا $\hat{أ}_.$ هو المتوسط ٦٧,٦، فإن نقطة الأصل فى هذه الحالة تكون هى السنه المناظره لهذا المتوسط وهى سنة ١٩٩٤، وبالتالى تكون معادلة خط الإتجاه العام فى الصورة:

$$ص_ر = ٦٧,٦ + ١,٨ س_ر \quad (٢)$$

(على أساس أن سنة ١٩٩٤ هى سنة الأساس أو نقطة الأصل، ووحدة قياس س سنة واحدة، ووحدة قياس ص بالألف).

وجدير بالذكر أنه يمكن الوصول من إحدى المعادلتين (١) أو (٢) إلى المعادلة الأخرى وذلك على النحو التالي:

من معادلة خط الإتجاه العام رقم (١) إذا تم التعويض عن قيمة س بـ س + ٦ نحصل على معادلة خط الإتجاه العام رقم (٢) كما يلي:

$ص_ر$ = ٥٦,٨ + ١,٨ ($س_ر$ + ٦)

= ٥٦,٨ + ١,٨$س_ر$ + ١٠,٨

= ٦٧,٦ + ١,٨ $س_ر$

بالمثل، إذا أخذنا معادلة خط الإتجاه العام رقم (٢) وتم التعويض عن قيمة س بـ س – ٦ نحصل على المعادلة رقم (١) كما يلي:

$ص_ر$ = ٦٧,٦ + ١,٨ ($س_ر$ – ٦)

= ٦٧,٦ + ١,٨$س_ر$ – ١٠,٨

= ٥٦,٨ + ١,٨ $س_ر$

٢- لإيجاد القيمة الإتجاهية لعدد المترددين على الوحدات الصحيه عام ١٩٩٨، يمكن استخدام أى من معادلتى خط الإتجاه العام السابقتين حيث نحصل – يقينا – على نفس الناتج:

فإذا استخدمنا المعادلة رقم (١) فإن:

$س_ر$ = ١٩٩٨ – ١٩٨٨ = ١٠ سنوات

إذن:

$ص_ر$ = ٥٦,٨ + ١,٨ (١٠) = ٧٤,٨ ألف فرد

وإذا استخدمنا المعادله رقم (٢) فإن:

$س_ر$ = ١٩٩٨ – ١٩٩٤ = ٤ سنوات

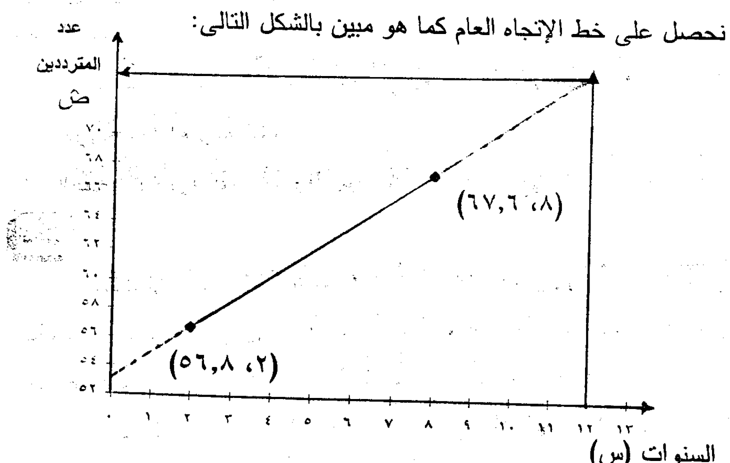
إذن:

ص ر = ٦٧,٦ + ١,٨ (٤) = ٧٤,٨ ألف فرد

وهى نفس النتيجة المتحصل عليها من المعادلة (١).

ثانياً: تقدير معادلة خط الإتجاه العام بيانياً:

فى هذه الحالة يمكن أن نرمز لسنوات السلسله ١٩٨٦ ، ١٩٨٧ ، ١٩٨٨، ......، ١٩٩٦ بالأرقام ٠، ١، ٢، ....، ١٠ على الترتيب. وبتمثيل النقطتين (٢، ٥٦,٨)، (٨، ٦٧,٦) بيانياً على الرسم وتوصيلهما نحصل على خط الإتجاه العام كما هو مبين بالشكل التالى:



ويمكن التنبؤ بالقيمة الإتجاهيه لعدد المترددين على الوحدات الصحيه فى سنة ١٩٩٨ باستخدام خط الإتجاه العام، فسنة ١٩٩٨ تناظر التسلسل الطبيعى ١٢، وعندما س = ١٢ فإن ص = ٧٣,٥ ألف فرد. ونلاحظ أن القيمة الإتجاهيه المتحصل عليها من الرسم البيانى تختلف عن تلك المتحصل

عليها من خط الإتجاه العام وفقـا للطريقـه الجبريـه نظـراً لأن كـلا الطريقتيـن تقريبى إلى حد كبير.

مثال (٣)

فيما يلى بيان بالمرتبات والأجور السنويه (بالمائه ألف جنيـه) بـإحدى الشركات فى الفترة من ١٩٩٠ إلى ١٩٩٧:

السنه	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧
المرتبات والأجور	٨	١١	٩	١٠	١٢	١٤	١٦	١٤

والمطلوب:

١- إيجـاد معادلـة خـط الإتجـاه العـام للمرتبـات والأجـور بالشـركه باسـتخدام طريقه شبه المتوسطات.

٢- القيمة الإتجاهيه للمرتبات والأجور بالشركه فى سنتى ١٩٨٧ ، ٢٠٠٥.

الحل

حيث أن عدد سنوات السلسله = ٨ سنوات، فسوف تقسم هذه السلسـلة مباشـــرة إلـــى فـــترتين زمنيتيـــن متســـاويتين، طـــول كـــل فـــترة يسـاوى ٤ سنوات حيـث القسـم الأول يشـمل السـنوات (١٩٩٠ - ١٩٩٣) والقسم الثانى يشمل السنوات (١٩٩٤ - ١٩٩٧)، فإذا اعتبرنا أن سنة ١٩٩٠ يمثلهـا النقطـة الزمنيـه ١٩٩٠/٧/١ وسـنة ١٩٩١ يمثلهـا النقطـة الزمنيـه ١٩٩١/٧/١ ..... وهكذا، فإن مجموع قيم الظاهرة ومتوسطها سوف يوضـع فـى مواجهـة منتصـف الفترة بين عـامى ١٩٩١ ، ١٩٩٢، أى عند النقطـة الزمنيه ١٩٩١,٥ والتى تعنى التاريخ ١٩٩٢/١/١. وبالمثل، فإن مجموع قيـم

الظاهرة ومتوسطها فى الفترة الثانيه سوف يوضع فى مواجهة النقطة الزمنيـه ١٩٩٥,٥ والتى تعنى التاريخ ١٩٩٦/١/١ كما يتضح فى الجدول التالى:

السنه	المرتبات والأجور (ص)	مجموع القيم بكل فترة	متوسط كل فترة	القيم الإتجاهيه (ض)
١٩٩٠	٨	٣٨	٩,٥	٧,٨١
١٩٩١	١١			٨,٩٤
١٩٩٢	٩			١٠,٠٦
١٩٩٣	١٠			١١,١٩
١٩٩٤	١٢	٥٦	١٤	١٢,٣١
١٩٩٥	١٤			١٣,٤٤
١٩٩٦	١٦			١٤,٥٦
١٩٩٧	١٤			١٥,٦٩

معادلة خط الإتجاه العام هى:

$$ض_ر = أ_. + أ_١ س_ر$$

حيث:

$$أ_١ = \frac{\text{الفرق بين الوسطين الحسابيين للفترتين}}{\text{الفرق بين زمنى الوسطين الحسابيين}} = \frac{١٤ - ٩,٥}{١٩٩٥,٥ - ١٩٩١,٥} = ١,١٢٥$$

فإذا اعتبرنا أن $أ_.$ هى المتوسط ١٤ فإن نقطة الأصل فى هذه الحالـه ستكون النقطة الزمنيه التى تواجهه هذا المتوسط وهى ١٩٩٥,٥:

وبذلك فإن معادلة خط الإتجاه العام تكون كما يلى:

$ص_ر = ١٤ + ١,١٢٥ س_ر$

(علـى أسـاس أن ١٩٩٥,٥ (والتـى تعنـى ١٩٩٦/١/١) هـى سـنة الأسـاس، ووحدة قياس الزمن سنه واحدة، ووحدة قياس الظاهرة بالمائة ألف جنيه).

٢- يمكن استخدام معادلة خط الإتجاه العام فى تقدير القيم الإتجاهيه للظـاهرة فى سنوات السلسله أو فى أى سنه أخرى سابقه عليهـا أو لاحقـه لها

فى سنة ١٩٩٠:

القيمة الإتجاهيه (ص) = ١٤ + ١,١٢٥ (-٥,٥) = ٨,٨١

حيث تـم التعويـض عـن س = ١٩٩٥,٥ - ١٩٩٠ = ٥,٥، وتـم التعويـض عنها بالسالب لأن سنة ١٩٩٠ سابقه لسنة الأساس.

فى سنة ١٩٩١:

القيمة الإتجاهيه (ص) = ١٤ + ١,١٢٥ (- ٤,٥) = ٨,٩٤

وهكذا بالنسبه لباقى سنوات السلسله كما هو مبين بالعمود الأخير من الجـدول السابق.

ويلاحظ أنه إذا تساوت القيمـة الإتجاهيـه للظـاهرة مـع قيمتهـا الفعليـه فإنـه قد يكـون معنـى ذلـك أنـه لا يوجـد تغيرات أخـرى (موسـميه ودوريـه وعشوائيه) أو أن هـذه التغيرات الأخـرى قد ألغت بعضهـا البعض، أمـا إذا اختلفت القيمة الإتجاهيه للظاهرة عن القيمة الفعليه لها فإن الفرق بينهما يتمثـل فى تأثير التغيرات الأخرى.

لحساب القيمة الإتجاهيه لما كانت عليـه المرتبـات والأجـور فـى سنة ١٩٨٧فإن:

ص = ١٤ + ١,١٢٥ (- ٨,٥) = ٤,٤٤

كما أن القيمه الإتجاهيه لما ستكون عليه المرتبات والأجـور بالشـركه سنة ٢٠٠٥ هى:

ص = ١٤ + ١,١٢٥ (٩,٥) = ٢٤,٦٩ .

(٤-٣) طريقة المتوسطات المتحركه

تستخدم طريقة المتوسـطات المتحركـه لوصـف الإتجـاه العـام لتطـور ونمو السلاسل الزمنيه وذلـك بالقضـاء علـى التغيرات الأخـرى مـن موسـميه ودوريه وعشوائيه ومن ثـم فـإن التغير المتبقى فى الظـاهرة لا يمثـل سـوى التغير الناتج عن الإتجاه العام.

وتعتمد هذه الطريقة على تكوين سلسله زمنيه جديدة يحل فيها الوسـط الحسابى لمجموعة من القيم محل كل قيمة أصليه حيث نبدأ من أعلى السلسـلة ونحسب متوسطات حسابيه متتاليه لمجموعات متداخله تتكـون كـل مجموعـة من ثلاث أو أربع أو خمس أو ...... مفردات حسب عدد المفردات الموجـودة فى السلسله الزمنيه، ونحسب الوسط الحسابى لكل مجموعه على أساس تغيـير المجموعه بحذف أول قيمه فيها واضافه قيمـة بديلـه لهـا مـن أول المجموعـه الثانيه، وهكذا تتكرر العمليه بأن نحذف قيمة من أعلى لكل مجموعه ونضيف بدلاً منها قيمة أخرى تاليه من أسفل حتى تنتهى جميع القيم بالسلسله الزمنيـه، لذلك فإن الوسط الحسـابى الـذى يحسـب لهـذه المجموعـات يكـون فـى الواقـع متوسطاً متحركاً.

فعلى سبيل المثال، إذا اعتبرنا أن طول الدورة ٣ سنوات، فإننا نوجـد مجموع القيم الثلاثه الأولى للظاهرة ونضع هذا المجموع أمام السنه الوسـطى (أى السنة الثانيه)، ثم نحذف القيمه الأولـى للظـاهرة ونضيـف القيمـة الرابعـه

بدلاً منها ثم نوجد مجموع القيم الثانيه، والثالثه والرابعه ونضعه أمام السنه الوسطى (أى السنه الثالثه)، وهكذا تستمر العمليه حتى تنتهى جميع القيم بالسلسله الزمنيه حيث تسمى هذه المجاميع بالمجاميع المتحركه، ثم نحسب متوسط كل مجموعه بأن نقسم كل مجموع متحرك على عدد حدود المجموعة (أى على ٣) فنحصل بذلك على سلسلة من المتوسطات المتحركه وهى عبارة عن القيم الإتجاهيه للظاهرة المطلوبه.

ولا يخفى أن الهدف من الحصول على المتوسطات المتحركه والتى تمثل القيم الإتجاهيه للظاهرة هو مقارنتها فى النهايه بالقيم الأصليه للظاهرة المواجهة لها وذلك لبيان أثر الإتجاه العام، إلا أن هذا لا يتحقق إلا إذا كان عدد القيم فى المجموعه عدداً فردياً، فمتوسط ثلاث قيم يتم وضعه أمام القيمة الثانيه فى الترتيب وكذلك متوسط خمس قيم يتم وضعه أمام القيمة الثالثه فى الترتيب وهكذا. أما إذا كان عدد القيم فى المجموعة زوجيا فإن المتوسط فى هذه الحاله سوف يقع بين قيمتين، فمتوسط أربع قيم سوف يوضع فى الفراغ بين القيمتين الثانيه والثالثه ومتوسط ست قيم سوف يوضع فى الفراغ بين القيمتين الثالثه والرابعه وهكذا. وفى هذه الحاله فإن عملية المواجهة بين القيم الأصليه للظاهرة والقيم الإتجاهيه لها لن تكون ممكنه، ويمكن علاج هذا الموقف باجراء عملية مركزه Centering لهذه المتوسطات وذلك بحساب الوسط الحسابى لكل وسطين متحركين وبذلك يكون الوسط الحسابى الممركز Centered average مقابلاً لإحدى القيم الأصليه.

ويلاحظ أن اختيار طول الدوره عند تكوين المجاميع وبالتالى المتوسطات المتحركه سوف يؤثر على كفاءة عملية التمهيد ومن ثم على

جودة القيم الإتجاهيه المتحصل عليها للظاهرة. فإختلاف طول الدوره سوف يؤدى إلى إختلاف القيم الإتجاهيه للظاهرة. ويجب مراعاة أنه فى حالة ما إذا كانت بيانات السلسله الزمنيه بيانات شهريه فمن المناسب أن يكون طول الدوره ١٢، وإذا كانت بيانات السلسله الزمنيه ربع سنويه فيفضل أن يكون طول الدوره ٤ وذلك لضمان التخلص من التغيرات الموسميه، أما إذا كانت بيانات السلسله الزمنيه سنويه فيفضل فى هذه الحاله أن يكون طول الدوره مساوياً لطول الدوره التجاريه أو دورة الأعمال للظاهرة لأن ذلك كفيل بالتخلص من التغيرات الدوريه، وإذا لم يكن للظاهرة دورة أعمال واضحة الطول فإن طول الدوره يظل عمليه اختياريه للباحث

ويجب ملاحظة أنه كلما زاد طول الدوره كلما أدى هذا إلى قضاء أكثر على التغيرات الموسميه والدوريه والعشوائيه وبالتالى إلى تمهيد أكثر لبيانات السلسله الزمنية، إلا أن ذلك يؤدى - فى نفس الوقت - إلى فقد أكثر لقيم بعض السنوات فى طرفىَ السلسله وبالتالى الحصول على عدد أقل من المتوسطات المتحركه. والعكس، فكلما كان طول الدوره صغيراً كلما كان التمهيد بسيطا والقيم المفقودة فى كل من طرفى السلسله أقل. فإذا كان طول الدوره ٥ سنوات مثلا، فقدت السلسله الزمنيه قيمتين من أعلى وقيمتين من أسفل، أما إذا كان طول الدوره ٧ سنوات فقدت السلسله الزمنيه ثلاث قيم من أعلى وثلاث قيم من أسفل وهكذا.

مثال (٤)

أحسب القيم الإتجاهيه لبيانات السلسله الزمنيه الوارده فى مثال (٢) وذلك باستخدام:

(أ) متوسط متحرك لفترة طولها ٣ سنوات.

(ب) متوسط متحرك لفترة طولها ٥ سنوات.

الحل

السنه	عدد المترددين	مجموع متحرك لمدة ٣ سنوات	القيم الإتجاهية بإستخدام متوسط متحرك لمدة ٣ سنوات	مجموع متحرك لمدة ٥ سنوات	القيم الإتجاهية باستخدام متوسط متحرك لمدة ٥ سنوات
١٩٨٦	٥٠				
١٩٨٧	٥٣	١٦١	٥٣,٦٧		
١٩٨٨	٥٨	١٧١	٥٧	٢٨٤	٥٦,٨
١٩٨٩	٦٠	١٨١	٦٠,٣٣	٢٩٩	٥٩,٨
١٩٩٠	٦٣	١٨٨	٦٢,٦٧	٣٠٨	٦١,٦
١٩٩١	٦٥	١٩٠	٦٣,٣٣	٣١٨	٦٣,٦
١٩٩٢	٦٢	١٩٥	٦٥	٣٢٣	٦٤,٦
١٩٩٣	٦٨	١٩٥	٦٥	٣٣٠	٦٦
١٩٩٤	٦٥	٢٠٣	٦٧,٦٧	٣٣٨	٦٧,٦
١٩٩٥	٧٠	٢٠٨	٦٩,٣٣		
١٩٩٦	٧٣				

(أ) إذا إستخدمنا متوسط متحرك لمدة ٣ سنوات:

أول متوسط متحرك نحصل عليه كالآتى:

نجمع قيم الظاهرة للثلاث سنوات الأولى وتساوى ٥٠ + ٥٣ + ٥٨ =١٦١ ونضعه أما السنة الوسطى وهى سنة ١٩٨٧ ثم نوجد المتوسط والذى يساوى ١٦١ ÷ ٣ = ٥٣,٦٧.

المتوسط المتحرك الثانى نحصل عليه كما يلى:

نهمل قيمة الظاهرة فى السنة الأولى وهى سنة ١٩٨٦ ونضيف بدلا منها قيمة الظاهرة فى السنة الرابعه وهى سنة ١٩٨٩ وبذلك يكون المجموع المتحرك الثانى هو ٥٣+٥٨ +٦٠ = ١٧١ والذى يوضع أمام السنه الوسطى لهذه المجموعة وهى سنة ١٩٨٨، ويكون المتوسط المتحرك الثانى هو ١٧١ ÷ ٣ = ٥٧.

من الواضح أنه كان من الممكن طرح قيمة الظاهرة فى سنة ١٩٨٦ (أى طرح ٥٠) من مجموع القيم بالثلاث سنوات الأولى (أى ١٦١) ثم إضافة قيمة الظاهرة فى سنة ١٩٨٩ (أى إضافة ٦٠) لنحصل على المجموع المتحرك الثانى، أى أن:

المجموع المتحرك الثانى = ١٦١ - ٥٠ + ٦٠ = ١٧١.

ومن ثم فإن:

المجموع المتحرك الثالث = ١٧١ - ٥٣ + ٦٣ = ١٨١

والمتوسط المتحرك الثالث = ١٨١ ÷ ٣ = ٦١,٣٣

وهكذا، فإن العمود الرابع من جدول الحل السابق يمثل المتوسطات المتحركه أو القيم الإتجاهية لعدد المترددين على الوحدات الصحيه عند إستخدام دورة طولها ٣ سنوات.

(ب) إذا إستخدمنا متوسط متحرك لمدة ٥ سنوات:

المجموع المتحرك الأول = ٥٠ + ٥٣ + ٥٨ + ٦٠ + ٦٣ = ٢٨٤

المتوسط المتحرك الأول = ٢٨٤ ÷ ٥ = ٦٥,٨

ويوضع هذا المجموع (وبالتالى المتوسط) المتحرك أمام السنه الوسطى لهذه المجموعة وهى سنة ١٩٨٨.

المجموع المتحرك الثانى = ٢٨٤ - ٥٠ + ٦٥ = ٢٩٩

المتوسط المتحرك الثانى = ٢٩٩ ÷ ٥ = ٥٩,٨

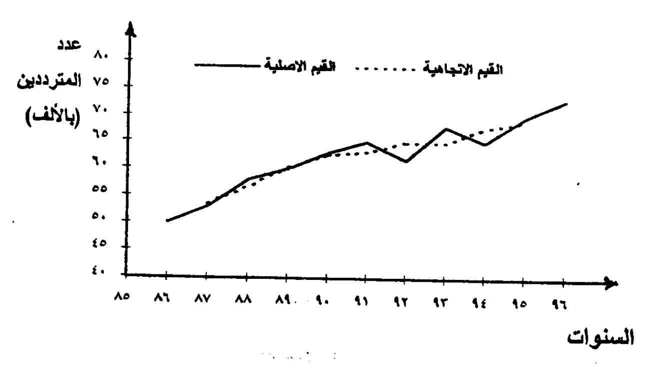
ويوضع هذا المجموع (وبالتالى المتوسط) أمام السنه الوسطى لهذه المجموعة وهى سنة ١٩٨٩.

وهكذا، فإن العمود السادس من الجدول السابق يتضمن المتوسطات المتحركه أو القيم الإتجاهيه للظاهرة عند إستخدام دوره طولها ٥ سنوات.

وبالنظر إلى القيم الإتجاهية للظاهرة نجد أنها تختلف فى حالة إستخدام متوسط متحرك طوله ٣ سنوات عنه فى حالة استخدام متوسط متحرك طوله ٥ سنوات، فمثلا فى سنة ١٩٩٠، نجد أن القيمة الإتجاهية تساوى ٦٢,٦٧ فى حالة استخدام متوسط متحرك لفترة طولها ٣ سنوات بينما القيمة الإتجاهيه تساوى ٦١,٦ فى حالة استخدام متوسط متحرك لفترة طولها ٥ سنوات، وهكذا فإن إختلاف طول الدوره يؤدى- فى معظم الأحيان - إلى إختلاف القيم الإتجاهية للظاهرة.

كما نلاحظ أيضاً أنه عندما إستخدمنا متوسط متحرك لفتره طولها ٣ سنوات فإن السلسله تفقد سنة فى كل طرف، وعندما استخدمنا متوسط متحرك لفترة طولها ٥ سنوات فإن السلسلة تفقد سنتين فى كل طرف.

ويمكن ملاحظة الأثر العملى لإستخدام المتوسطات المتحركة فى عملية تمهيد السلسلة بالنظر إلى الشكل (٦) حيث تم رسم القيم الأصلية للظاهرة والقيم الإتجاهية لها بإستخدام متوسط متحرك لمدة ٥ سنوات.



شكل (٦)

مثال (٥)

الجدول الآتى يبين قيمة الفوائد الربع سنويه (بالمليون جنيه) المستحقه لأحد أنواع شهادات الإدخار بأحد البنوك فى الفترة من ١٩٩٥ حتى ١٩٩٧

السنه	١٩٩٥				١٩٩٦				١٩٩٧			
الربع سنه	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
الفوائد	٢٦	٣٨	٣١	٢٩	٣٢	٣٠	٣٥	٣٧	٣٨	٤٠	٣٦	٤١

والمطلوب حساب القيم الإتجاهيه للفوائد الربع سنويه بالبنك بإستخدام متوسط متحرك طوله ٤ أرباع سنة.

الحل

السنه	الربع سنه	الفوائد	مجموع متحرك لمدة ٤ أرباع سنه	القيم الإتجاهيه بإستخدام متوسط متحرك لمدة ٤ أرباع سنه	القيم الإتجاهيه بإستخدام المتوسط الممركز
١٩٩٥	الأول	٢٦			
	الثانى	٣٨			
			١٢٤	٣١	
	الثالث	٣١			٣١,٧٥
			١٣٠	٣٢,٥	
	الرابع	٢٩			٣١,٥
			١٢٢	٣٠,٥	
١٩٩٦	الأول	٣٢			٣١
			١٢٦	٣١,٥	
	الثانى	٣٠			٣٢,٥
			١٣٤	٣٣,٥	
	الثالث	٣٥			٣٤,٢٥
			١٤٠	٣٥	
	الرابع	٣٧			٣٦,٢٥
			١٥٠	٣٧,٥	
١٩٩٧	الأول	٣٨			٣٦,٦٢٥
			١٥١	٣٧,٧٥	
	الثانى	٤٠			٣٨,٢٥
			١٥٥	٣٨,٧٥	
	الثالث	٣٦			
	الرابع	٤١			

حيث أن عدد المفردات داخل الدوره الواحده هو ٤ فإن المجاميع (وبالتالى المتوسطات) المتحركه - كما هو واضح - سوف لا تقع فى مواجهة القيم الأصليه وإنما سوف تقع فى مواجهة الفراغ الموجود بين كل قيمتين أصليتين، فمثلاً المجموع المتحرك الأول والذى يساوى ١٢٤ (وبالتبعية المتوسط المتحرك الأول والذى يساوى ٣١) سوف يوضع فى مواجهة الفراغ الموجود بين القيمتين الثانيه والثالثه، كما أن المجموع المتحرك الثانى والذى يساوى ١٣٠ (وبالتالى المتوسط المتحرك الثانى والذى يساوى ٣٢,٥) سوف يوضع فى مواجهة الفراغ الموجود بين القيمتين الثالثه والرابعه وهكذا.

ولكى نجعل المتوسطات المتحركه (أى القيم الإتجاهيه) مواجهة للقيم الأصليه سوف نقوم بعملية مركزه للأوساط الحسابيه بأن نحسب الوسط الحسابى الممركز لكل وسطين ويوضع فى مواجهة الفراغ الموجود بينهما وسيكون حينئذ فى مواجهة قيمة أصليه.

فمثلاً الوسط الحسابى الممركز الأول = $\frac{٣٢,٥ + ٣١}{٢}$ = ٣١,٧٥

وهو يقابل الربع الثالث من عام ١٩٩٥.

كما أن الوسط الحسابى الممركز الثانى = $\frac{٣٠,٥ + ٣٢,٥}{٢}$ = ٣١,٥

وهو يقابل الربع الرابع من عام ١٩٩٥ وهكذا.

وبالرغم من وجاهة فكرة المتوسطات المتحركة وسهولة الحصول عليها إذ لا يتطلب ذلك سوى عمليات حسابية بسيطة، إلا أنه يعاب على طريقة المتوسطات المتحركة ما يأتى:

(أ) أنها تؤدى إلى فقد قيم بعض الفترات الزمنيه فى كل من طرفى السلسله الزمنيه.

(ب) أن المتوسطات المتحركة للمجموعات المتعاقبه قد تختلف باختلاف عدد المفردات الداخله فى المجموعة وما قد يترتب على هذا الإختلاف من إختلاف فى المجموع وبالتالى فى المتوسط المحسوب لكل مجموعه، وإذا لم يكن للظاهرة محل الدراسة دورة أعمال واضحة الطول فإن اختيار طول الدورة (أى عدد المفردات الداخله فى المجموعه) يظل مسأله تقديريه تختلف من باحث لآخر.

(جـ) أنها تعطى القيم الإتجاهيه فقط والتى تظهر عادة فى شكل خطوط متعرجه على الرسم ولكنها لا تعطى معادلة الخط المستقيم أو المنحنى ذى الصيغه المحدده لوصف الإتجاه العام للظاهرة.

(٤-٤) طريقة المربعات الصغرى

يستخدم أسلوب تحليل الإنحدار فى تعيين الإتجاه العام للسلسله الزمنيه، وتعتبر طريقة المربعات الصغري – والتى عرضت بالتفصيل عند دراسة الإنحدار – من أهم وأكثر الطرق المستخدمه لتقدير معادلة خط الإتجاه العام.

بفرض أن معادلة خط الإتجاه العام الحقيقية لـ ص على س بمجتمع الدراسة تأخذ الصورة:

$$ص_ر = أ_. + أ_١ س_ر + ق_ر \qquad ر = ١، ٢، ٣، ....، ن$$

حيث:

$ص_ر$ = القيمـة الفعليـة للمتغير التـابع المـراد تفسـيره أو للظـاهرة محـل الدارسة.

$س_ر$ = المتغير المستقل وهـو هنـا دائمـاً عبـارة عـن الفترات الزمنيـه المتعاقبه.

$أ_.$ = الجزء المقطوع من محور الصادات.

$أ_١$ = ميل الخط المستقيم والذى يسـاوى ظـل الزاويـه التـى يصنعهـا خط الإنحدار مع محور السينات وهـو يمثـل فـى هـذه الحالـه معدل التغير للإتجاه العام بالنسبه للوحدة الزمنيه.

$ق_ر$ = الخطأ العشوائى أو البواقى أوالعوامل الأخرى التى تؤثر علـى المتغير التابع ص بالإضافة إلى المتغير المستقل س.

ن = عدد أزواج القيم ($س_ر$ ، $ص_ر$)

وتعـرف $أ_.$ ، $أ_١$ بأنهـا معـالم معادلـة الإنحـدار والتـى غالبـا مـا تكـون مجهولة.

وتهدف طريقة المربعات الصغـرى إلـى الحصـول علـى أفضـل خـط مستقيم يعبرعن العلاقة بين المتغيرين س ، ص ، ويكون هذا الخط هو الخـط الذى يمر بأكبر عدد ممكن من النقط الممثله فى شكل الإنتشار ويمـر بتـوازن بين بقية النقاط الأخرى، والأساس الذى تقوم عليه طريقة المربعات الصغـرى هو تقدير الخط الذى يكون مجموع مربعات انحرافات النقاط عنـه أصغـر مـا يمكن، كما يظهر فى شكل (٧)، ويتم ذلك رياضياً على النحو التالى:

نفرض أن معادلة خط الإتجـاه العـام لــ ص على س المقدرة مـن عينه حجمها ن خاصه بالمتغيرين (س، ص) تكون على الصورة:

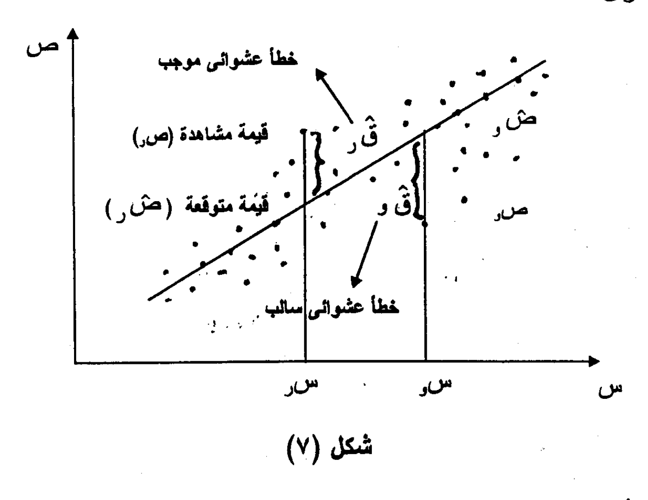
$$\hat{ص}_{ر} = \hat{أ}_{.} + \hat{أ}_{1} س_{ر}$$

حيث:

$\hat{ص}_{ر}$ = القيمة المقدرة (أوالإتجاهيه) للمتغير التابع $ص_{ر}$

$\hat{أ}_{.}$ ، $\hat{أ}_{1}$ = تقديريـن – محسـوبين مـن بيانـــات العينــة – لمعلمتــى المجتمع المجهولتين $أ_{.}$ ، $أ_{1}$ على الترتيب.

وتهدف طريقة المربعات الصغرى إلى إيجاد التقديرين $\hat{أ}_{.}$ ، $\hat{أ}_{1}$ اللذين يجعلان مجموع مربعات البواقى وهو مجـ $\hat{ق}_{ر}^{2}$= صفر (أى أصغر مـا يمكـن) ولعـل هـذا هـو السـبب فـى تسـمية هـذه الطريقــة بطريقــة المربعــات الصغرى.



شكل (٧)

وتتميز التقديرات التى نحصل عليها من هذه الطريقة بالآتى:

(١) مجموع انحرافات القراءات عن خط الإنحدار (أى مجموع البواقى) = صفر.

فالخطأ العشوائى $\hat{ق}_ر$ يمثل الفرق بين القيمة الفعلية والقيمة المقدره للمتغير التابع $ص_ر$ ، أى أن:

$$\hat{ق}_ر = ص_ر - \hat{ص}_ر = ص_ر - \hat{أ}_. - \hat{أ}_١ س_ر$$

ويمكن التعبير عن هذه الخاصية كما يلى:

$$مجـ \hat{ق}_ر = مجـ (ص_ر - \hat{ص}_ر) = صفر$$

أى أن:

$$مجـ ص_ر = مجـ \hat{ص}_ر$$

بمعنى أن مجموع القيم الفعليه للمتغير التابع ص تساوى مجموع القيم التقديريه له.

(٢) مجموع مربعات انحرافات القراءات عن خط الإنحدار (أى مجموع مربعات البواقى) أصغر ما يمكن، بمعنى أن:

$مجـ \hat{ق}_ر^٢ = مجـ (ص_ر - \hat{ص}_ر)^٢$ تكون أصغر ما يمكن.

وتستخدم هذه الخاصية للحصول على التقديرين $\hat{أ}_.$، $\hat{أ}_١$ وذلك بإيجاد المشتقات التفاضليه الجزئيه لمجموع مربعات البواقى بالنسبة لكل من $\hat{أ}_.$، $\hat{أ}_١$ ومساواة الناتج بالصفر ثم حل المعادلتين الطبيعيتين الناتجتين على النحو التالى:

$$مجـ \hat{ق}_ر^٢ = مجـ (ص_ر - \hat{ص}_ر)^٢ = مجـ (ص_ر - \hat{أ}_. - \hat{أ}_١ س_ر)^٢$$

بتفاضل مجـ $\hat{ق}_ر^2$ بالنسبة لـ $\hat{أ}_.$ مرة وبالنسبة لـ $\hat{أ}_1$ مرة أخرى ومساواة الناتج بالصفر نحصل على:

$$\frac{\partial\, مجـ\ \hat{ق}_ر^2}{\partial\, \hat{أ}_.} = -2\ مجـ\ (ص_ر - \hat{أ}_. - \hat{أ}_1\ س_ر) = صفر$$

$$\frac{\partial\, مجـ\ \hat{ق}_ر^2}{\partial\, \hat{أ}_1} = -2\ مجـ\ (ص_ر - \hat{أ}_. - \hat{أ}_1\ س_ر) = صفر$$

من المعادلتين السابقتين نصل إلى المعادلتين الطبيعيتين الآتيتين:

$$مجـ\ ص_ر = ن\ \hat{أ}_. + \hat{أ}_1\ مجـ\ س_ر \qquad (1)$$

$$مجـ\ س_ر\ ص_ر = \hat{أ}_.\ مجـ\ س_ر + \hat{أ}_1\ مجـ\ س_ر^2 \qquad (2)$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على التقديرين $\hat{أ}_.$ ، $\hat{أ}_1$ في الصورة:

$$\hat{أ}_1 = \frac{مجـ\ س_ر\ ص_ر - \frac{مجـ\ س_ر \times مجـ\ ص_ر}{ن}}{مجـ\ س_ر^2 - \frac{(مجـ\ س_ر)^2}{ن}} \qquad (3)$$

$$\hat{أ}_. = \bar{ص} - \hat{أ}_1\ \bar{س} \qquad (4)$$

حيث $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ هما الوسطان الحسابيان للمتغيرين س ، ص على الترتيب -

وبذلك تكون أفضل معادلة مقدرة لخط الإتجاه العام للظاهرة هي:

$$\hat{ص}_ر = \hat{أ}_. + \hat{أ}_1\ س_ر$$

وتستخدم هذه المعادلة فى الحصول على قيم للظاهرة عن فترات زمنيه ماضيه تسبق فترات السلسلة وهو ما يعرف بالتنبؤ الخلفى وقيم للظاهرة عن الحاضر لفترات زمنيه ليست موجوده بين البيانات الأصلية وقيم للظاهرة عن فترات زمنيه مستقبليه لم تحل بعد وهو ما يعرف بالتنبؤ الأمامى، بيد أنه لا يجب الإسراف فى التفاؤل عند إستخدام معادلة خط الإتجاه العام فى التنبؤ الخلفى أو الأمامى، إذ لا يحسن التنبؤ بقيم الظاهره لفترات تبعد كثيراً عن الفترة التى تم على أساسها تقدير ثوابت المعادله، فالمعادله التى نحصل عليها لا تمثل حركة الظاهرة إلا أثناء المدة المشمولة بالدراسه أو على الأقل أنها أكثر تمثيلاً لهذه الظاهرة خلال هذه المدة عنها فى أى مدد أخرى.

وحيث أن س تشير دائما إلى الفترات الزمنيه المتتاليه فى نماذج السلاسل الزمنيه فإنه يمكن تبسيط تقديرات المربعات الصغرى واختصارها لدرجة كبيرة بأن تؤخذ نقطة الأصل بالنسبة للزمن فى منتصف السلسله وترقم الفترات الزمنيه بالنسبة لنقطة الأصل بالسالب والموجب بحيث يصير

مجـ $س_ر$ = صفر

فإذا كان عدد فترات السلسله الزمنيه فردى (٧ مثلاً)، اعتبرت الفترة الزمنيه الوسطى (أى الفترة الرابعه) هى فترة الأساس أو نقطة الأصل وتعطى القيمة صفر وتكون قيم س هى

-٣، -٢، -١، صفر، ١، ٢، ٣ على التوالى

أما إذا اشتملت السلسله الزمنيه على عدد زوجى من الفترات الزمنيه (٨ مثلاً)، اعتبرت نقطة الأصل فى منتصف الفترتين الوسيطتين (أى منتصف الفترتين الرابعه والخامسه) وتكون قيم س الجديدة بعد نقل نقطة الأصل هى:

-٧، -٥، -٣، -١، ١، ٣، ٥، ٧ على التوالى

حيث يعبر فى هذه الحالة عن الفترة الزمنيه بوحدتين زمنيتين.

وبذلك تصبح المعادلتين (٣)، (٤) كالتالى:

$$\hat{أ}_{١} = \frac{\text{مجـ}\ س_{ر}\ ص_{ر}}{\text{مجـ}\ س_{ر}^{٢}} \qquad (٥)$$

$$\hat{أ}_{.} = \bar{ص} \qquad (٦)$$

ومما لاشك فيه أن ذلك يؤدى إلى تبسيط واضح فى العمليات الحسابيه.

وسوف نعرض فيما يلى مثالين لتقدير معادلة خط الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى فى حالة ما إذا كان عدد فترات السلسلة الزمنيه:

(أ) فردى (ب) زوجى

مثال (٦)

البيانات التاليه تبين الأرباح السنوية (بالمليون جنيه) لأحد المصانع فى الفترة من ١٩٨٩ - ١٩٩٧:

السنة	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧
الأرباح	٦٤	٦٥	٦٧	٦٥	٦٩	٦٧	٦٥	٧٠	٧١

والمطلوب:

(١) تقدير معادلة خط الإتجاه العام لأرباح المصنع مستخدماً طريقة المربعات الصغرى.

(٢) إيجاد القيم الإتجاهية لأرباح المصنع فى سنوات السلسلة وفى سنة ٢٠٠٠.

الحل

حيث أن عدد سنوات السلسلة الزمنيه هو ٩ (أى عدد فردى)، فسوف نعتبر أن السنة الوسطى (وهى سنة ١٩٩٣) هى نقطة الأصل وتعطى القيمة صفر وترقم السنوات الأخرى كالتالى:

-٤، -٣، -٢، -١، صفر، ١، ٢، ٣، ٤

بمعنى أن يتغير مدى البيانات بتحريك نقطة الأصل كما هو موضح بالشكل (٨)

١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧
-٤	-٣	-٢	-١	صفر	١	٢	٣	٤

شكل (٨)

ولإيجاد قيم $أ_.$، $أ_١$ يلزم تكوين الجدول التالى:

السنه (س)	الأرباح (ص)	س المعدله	س ص	س^٢	القيم الإتجاهيه للأرباح (صَ)
١٩٨٩	٦٤	-٤	-٢٥٦	١٦	٦٤,٢٨
١٩٩٠	٦٥	-٣	-١٩٥	٩	٦٤,٩٦
١٩٩١	٦٧	-٢	-١٣٤	٤	٦٥,٦٤
١٩٩٢	٦٥	-١	-٦٥	١	٦٦,٣٢
١٩٩٣	٦٩	صفر	صفر	صفر	٦٧
١٩٩٤	٦٧	١	٦٧	١	٦٧,٦٨
١٩٩٥	٦٥	٢	١٣٠	٤	٦٨,٣٦
١٩٩٦	٧٠	٣	٢١٠	٩	٦٩,٠٤
١٩٩٧	٧١	٤	٢٨٤	١٦	٦٩,٧٢
المجموع	٦٠٣	صفر	٤١	٦٠	

١- معادلة خط الإتجاه العام المقدرة هى:

$صَ_ر = أ_. + أ_١ س_ر$

حيث:

$$\hat{أ}_1 = \frac{\text{مجـ } س_ر ص_ر}{\text{مجـ } س_ر^2} = \frac{41}{60} = 0.68$$

$$\hat{أ}_. = \bar{ص} = \frac{\text{مجـ } ص_ر}{ن} = \frac{603}{9} = 67$$

وتكون معادلة خط الإتجاه العام المقدره هى:

$\hat{ص}_ر$ = ٦٧ + ٠,٦٨ $س_ر$

(على أساس أن سنة ١٩٩٣ هى نقطة الأصل، وحدة قياس الزمن سنة واحدة، وحدة قياس الظاهرة بالمليون جنيه).

٢- من معادلة خط الإتجاه العام المقدره يمكن الحصول على القيم الإتجاهيه للأرباح فى سنوات السلسلة والمبينه فى العمود الأخير من الجدول السابق، حيث تم التعويض فى المعادلة المتحصل عليها عن قيمة س المعدلة المناظرة لكل سنه من سنوات السلسلة، فعلى سبيل المثال فإن:

القيمة الإتجاهيه فى سنة ١٩٨٩ = $\hat{ص}$ = ٦٧ + ٠,٦٨ (-٤) = ٦٤,٢٨

، القيمة الإتجاهية في سنة ١٩٩٥ = $\hat{ص}$ =٦٧+ ٠,٦٨ (٢) = ٦٨,٣٦

وهكذا.

بالمثل، فإن القيمة الإتجاهيه للأرباح فى سنة ٢٠٠٠ هى:

$\hat{ص}$ = ٦٧ + ٠,٦٨ (٧) = ٧١,٧٦

حيث تم التعويض فى معادلة الإتجاه العام عن س بالفرق بين عامى ٢٠٠٠، ١٩٩٣ والذى يساوى ٧ سنوات.

مثال (٧)

البيانات التاليه تبين الكميات المنتجه سنوياً من البصـل (بـالألف طـن) فى إحدى محافظات مصر خلال الفترة من ١٩٨٧ حتى ١٩٩٦.

السنه	١٩٨٧	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦
الكميات المنتجه	٢١	٢٣	٢٠	٢٧	٣٠	٢٨	٣٢	٣٦	٤٠	٤٠

والمطلوب:

(١) تقدير معادلة خط الإتجاه العام لكمية الإنتاج باستخدام طريقـة المربعـات الصغرى.

(٢) إيجاد القيمة الإتجاهيه لكمية الإنتاج فى عامى ١٩٨٦ ، ١٩٩٩.

الحل

حيث أن عدد سنوات السلسله الزمنيه هو ١٠ (أى عدد زوجى)، لذلك فإن نقطة الأصل سـوف تقـع فـى منتصـف السـنتين الوسـيطتين وهمـا عـامى ١٩٩١ ، ١٩٩٢، ومن ثم ستكون نقطة الأصل هى النقطة الزمنيـه ١٩٩١,٥ وهى- كما أسلفنا فى مثال سابق - تعنى التاريخ ١٩٩٢/١/١ بإعتبار أن سنة ١٩٩١ يمثلها التاريخ ١٩٩١/٧/١، ولهذا فسوف تستخدم نصف السنة كوحدة زمنيـه وتعـدل السـنوات علـى هذا الأسـاس فسـنة ١٩٩١ تسـاوى -١ وسـنة ١٩٩٢ تساوى ١، وسنة ١٩٩٠ تساوى -٣ وسـنة ١٩٩٣ تسـاوى ٣ وهكـذا يتـم تـرقيم السلسـلة بفـارق وحدتيـن زمنيتيـن باسـتمرار كمـا هـو موضـح بالشكل (٩).

١٩٨٧ ١٩٨٨ ١٩٨٩ ١٩٩٠ ١٩٩١ ١٩٩٢ ١٩٩٣ ١٩٩٤ ١٩٩٥ ١٩٩٦

-٩ -٧ -٥ -٣ -١ ١ ٣ ٥ ٧ ٩

نقطة الأصل

شكل (٩)

لإيجاد معادلة خط الإتجاه العام يلزم تكوين الجدول التالى:

السنه (س)	الكميات المنتجه (ص)	س المعدله	س ص	س^{٢}
١٩٨٧	٢١	-٩	-١٨٩	٨١
١٩٨٨	٢٣	-٧	-١٦١	٤٩
١٩٨٩	٢٠	-٥	-١٠٠	٢٥
١٩٩٠	٢٧	-٣	-٨١	٩
١٩٩١	٣٠	-١	-٣٠	١
١٩٩٢	٢٨	١	٢٨	١
١٩٩٣	٣٢	٣	٩٦	٩
١٩٩٤	٣٦	٥	١٨٠	٢٥
١٩٩٥	٤٠	٧	٢٨٠	٤٩
١٩٩٦	٤٠	٩	٣٦٠	٨١
المجموع	٢٩٧		٣٨٣	٣٣٠

١- لإيجاد معادلة خط الإتجاه العام فإن:

$$أ_{١} = \frac{مجـ\ س_ر\ ص_ر}{مجـ\ س_ر^{٢}} = \frac{٣٨٣}{٣٣٠} = ١,١٦$$

$$أ. = \bar{ص} = \frac{٢٩٧}{١٠} = ٢٩,٧$$

وتكون معادلة خط الإتجاه العام المقدرة من عينه الدراسة هى:

ضَ ر = ٢٩,٧ + ١,١٦ س ر (١)

(على أساس أن سنة ١٩٩١,٥ هى نقطة الأصل، وحدة قياس الزمن (س) نصف سنة، وحدة قياس الظاهرة (ص) بالألف طن سنوياً)

٢- لإيجاد القيمة الإتجاهيه لكمية الإنتاج فى سنة ١٩٨٦، نعوض فى معادلة خط الإتجاه العام عن س بالفرق بين عامى ١٩٩١,٥، ١٩٨٦ والذى يساوى ٥,٥ سنوات وهو يساوى ١١ نصف سنة، وحيث أن سنة ١٩٨٦ تسبق نقطة الأصل فيتم التعويض عن س بقيمتها السالبه (أى - ١١)، إذن:

القيمة الإتجاهيه لكمية الإنتاج فى سنة ١٩٨٦ = ضَ = ٢٩,٧ + ١,١٦(-١١) = ١٦,٩٤.

بالمثل، للحصول على القيمة الإتجاهيه لكمية الإنتاج فى سنة ١٩٩٩ يتم التعويض فى المعادلة عن س ر بالفرق بين عامى ١٩٩٩ ، ١٩٩١,٥ وهويساوى ٧,٥ سنوات أى ١٥ نصف سنة، ولأن سنة ١٩٩٩ تلى نقطة الأصل فيتم التعويض عن س بقيمتها الموجبه (أى ١٥)، إذن:

القيمة الإتجاهيه لكمية الإنتاج فى سنة ١٩٩٩ = ضَ = ٢٩,٧ + ١,١٦(١٥) = ٤٧,١.

ملاحظات حول معادلة خط الإتجاه العام:

نلاحظ على معادلة خط الإتجاه العام ما يلى:

١- أنه يمكن تغيير نقطة الأصل أو فترة الأساس فى معادلة خط الإتجاه العام إلى أى نقطة زمنيه أخرى يقاس الإتجاه العام بالنسبة لها، فإذا أريد تحريك نقطة الأصل م وحدة زمن للأمام أو للخلف يتم التعويض عن س بـ (س + م) أو (س − م) على الترتيب، وفى هذه الحاله تتغير قيمة الجزء المقطوع من محور الصادات (أى $أ_٠$) فى حين تظل قيمة ميل خط الإتجاه العام (أى $أ_١$) ثابته.

ففى المثال السابق يمكن تغيير نقطة الأصل من النقطة الزمنيه ١٩٩١,٥ إلى النقطة الزمنيه ١٩٩١ − مثلا − بأن نعوض فى المعادلة ذاتها عن س بـ (س − ١) وتكون معادلة خط الإتجاه العام هى:

$$ص_ر = ٢٩,٧ + ١,١٦(س_ر - ١)$$

$$= ٢٨,٥٤ + ١,١٦\ س_ر \qquad (٢)$$

(على أساس أن سنة ١٩٩١ هى سنة الأساس، وحدة قياس الزمن (س) نصف سنة، وحدة قياس الظاهرة (ص) بالألف طن سنوياً)

٢- أنه يمكن تغيير وحدات قياس الزمن س من وحدات سنوية إلى وحدات نصف سنوية أو ربع سنويه أو شهرية أو أى وحدات أخرى وبالعكس، فلتغيير وحدة قياس الزمن من سنة إلى نصف سنه نضرب معامل س × $\frac{١}{٢}$، ومن سنة إلى شهر نضرب معامل س × $\frac{١}{١٢}$، ومن نصف سنه إلى سنة نضرب معامل س × ٢ وهكذا. وفى هذه الحاله تتغير قيمة ميل خط الإتجاه العام (أى $أ_١$)

ففى المثال السابق، يمكن تغيير وحدة قياس الزمن (س) بالمعادلة (٢) من نصف السنه إلى سنه واحدة بأن نضرب معامل س × ٢ وتصبح معادلة خط الإتجاه العام الجديده هى:

ص̂ر = ٢٨,٥٤ + ١,١٦(٢) سر

= ٢٨,٥٤ + ٢,٣٢ سر (٣)

(على أساس أن سنة ١٩٩١ هى نقطة الأصل، وحدة قياس الزمن (س) سنة واحدة، وحدة قياس الظاهرة (ص) بالألف طن سنوياً).

ولابد من التأكيد أنه رغم اختلاف قيمتى أ. ، أ١ أحدهما أو كلاهما فى المعادلة (٣) عن قيمتهما فى كل من المعادلتين (٢) ، (١) فإن قيم ص̂ المحسوبه بأى من المعادلات الثلاثه لابد وأن تتساوى، وللتحقق من ذلك يمكن استخدام المعادلة (٣) فى ايجاد القيمة الإتجاهيه لكمية الإنتاج فى سنة ١٩٩٩، حيث يتم التعويض فى المعادلة عن س بالفرق بين عامى ١٩٩٩، ١٩٩١ والذى يساوى ٨ سنوات وبالتالى فإن:

القيمه الإتجاهيه لكمية الإنتاج فى سنة ١٩٩٩

= ٢٨,٥٤ + ٢,٣٢ (٨) = ٤٧,١

وهى نفس القيمة المتحصل عليها عند استخدام معادلة خط الإتجاه العام (١).

٣- أنه يمكن تغيير وحدات قياس المتغير التابع ص وفى هذه الحاله سوف تتغير قيمة كل من أ. ، أ١، فلتغيير وحدة قياس ص من وحدة سنويه إلى وحدة نصف سنويه نضرب قيمة كل من أ.، أ١ × $\frac{١}{٢}$، ولتغيير وحدة

قياس ص من وحدة سنوية إلى وحدة شهرية نضرب قيمة كل من $\hat{أ}_{.}$، $\hat{أ}_{١} \times \frac{١}{١٢}$ وهكذا.

فمن معادلة خط الإتجاه العام (٣) وبفرض أن مقتضيات التحليل تتطلب تغيير وحدات قياس ص من كمية الإنتاج السنويه إلى متوسط كمية الإنتاج الشهرية فيقتضى ذلك ضرب قيمة كل من $\hat{أ}_{.}$، $\hat{أ}_{١} \times \frac{١}{١٢}$، حيث أن الوحدة الشهرية تمثل $\frac{١}{١٢}$ من الوحدة السنوية وتكون معادلة خط الإتجاه العام الجديدة هى:

$$\hat{ص}_{ر} = \frac{١}{١٢}(٢٨{,}٥٤) + \frac{١}{١٢}(٢{,}٣٢)\ س_{ر}$$

$$= ٢{,}٣٧٨ + ٠{,}١٩٣\ س_{ر} \qquad (٤)$$

(على أساس أن سنة ١٩٩١ هى نقطة الأصل، وحدة قياس الزمن (س) سنة واحدة،وحدة قياس (ص) متوسط كمية الإنتاج الشهرية بالألف طن)

وبعد تغيير وحدات قياس (ص) إلى متوسط كمية الإنتاج الشهرية يمكن تعديل معادلة خط الإتجاه العام أكثر من ذلك بتغيير وحدات قياس س لكى تشير إلى الشهور المتتالية وذلك بأن نضرب معامل س فى المعادلة (٤) فى $\frac{١}{١٢}$ بينما تظل قيمة $\hat{أ}_{.}$ ثابتة وتكون معادلة خط الإتجاه العام الجديدة هى:

$$\hat{ص}_{ر} = ٢{,}٣٧٨ + \frac{١}{١٢}(٠{,}١٩٣)\ س_{ر}$$

$$= ٢{,}٣٧٨ + ٠{,}٠١٦٠٨\ س_{ر} \qquad (٥)$$

(على أساس أن سنة ١٩٩١ هى نقطة الأصل، وحدة قياس الزمن (س) شهر واحد، وحدة قياس (ص) متوسط كمية الإنتاج الشهرى بالألف طن).

وتتميز طريقة المربعات الصغرى بأنها لا تعتمد على التقدير الشخصى للباحث وأنها تصيغ القيم صياغة رياضية محددة واضحة المعالم بالإضافة إلى أن تقديرات المربعات الصغرى تتمتع بخصائص احصائية جيده، فهى تقديرات خطية وغير متحيزة ومتسقة ولها أصغر تباين بالنسبة لجميع التقديرات الخطية والغير متحيزة الأخرى، مما يجعل هذه الطريقة أكثر الطرق استخداماً فى قياس الإتجاه العام للسلاسل الزمنية.

ويعاب على طريقة المربعات الصغرى صعوبة تطبيقها خصوصاً إذا كانت الظاهرة ذات قيم كبيرة ومسجلة لفترات زمنية طويلة أو إذا كانت معادلة الإتجاه العام غير خطية كأن تكون أسية أو لوغاريتمية أو من الدرجة الثانية أو الثالثة وهكذا.

إختبار الخطية للإتجاه العام:

يسمى هذا الإختبار بإختبار شو للخطية ويهدف إلى معرفة ما إذا كانت معادلة خط الإتجاه العام للسلسلة الزمنية يمكن أن تعبر بدقة عن الفترة الزمنية المشمولة بالدراسة أم أنه إذا قسمت هذه الفترة إلى قسمين فإن خط الإتجاه العام الذى يمثل القسم الأول من الفترة الزمنية يختلف معنويا عن خط الإتجاه العام الذى يمثل القسم الثانى منها، أى أن الغرض أساساً من الإختبار هو معرفة ما إذا كان هناك اختلاف يعتد به بين القسمين من حيث خط الاتجاه العام وفى هذه الحالة لا يمكن أن يسود خط إتجاه عام واحد للفترة الزمنية كلها، أم أن الاختلاف بين القسمين بخصوص خط الإتجاه العام بسيط لا يعتد به ومن ثم يمكن أن يسود خط إتجاه عام واحد للفترة كلها.

وتصاغ المشكلة فى شكل الفرضين الآتيين:

الفرض العدمى : H_0 : ويعنى أنه لا يوجد فرق معنوى بين خط الإتجاه العام للقسم الأول وخط الإتجاه العام للقسم الثانى، أى أنه ينبغى أن يسود خط إتجاه عام واحد للفترة كلها.

الفرض البديل : H_1 : ويعنى أنه يوجد فرق معنوى بين خط الإتجاه العام للقسم الأول وخط الإتجاه العام للقسم الثانى، أى أنه ينبغى أن يكون لكل قسم خط الإتجاه العام الخاص به.

ويجرى الإختبار على النحو التالى:

(١) يتم تقدير معادلة خط الإتجاه العام للفترة كلها على الصورة :

$$\hat{ص}_ر = \hat{أ}_. + \hat{أ}_١ \, س_ر$$

وتستخدم هذه المعادلة فى ايجاد القيم الإتجاهية ($\hat{ص}_ر$) للظاهرة ثم تحسب مجموع مربعات انحرافات القيم الفعلية للظاهرة عن القيم الإتجاهية لها أى مجموع مربعات البواقى وهى:

$$مجـ \, \hat{ق}_ر^٢ = مجـ (ص_ر - \hat{ص}_ر)^٢ \, ،$$

وتكون درجات الحرية هى (ن -٢) حيث ن تمثل عدد مفردات الظاهرة للفترة الزمنية كلها، كما أن ٢ تعبر عن عدد المعاملات المجهولة والتى تم تقديرها وهما $أ_.$، $أ_١$.

(٢) تقسم السلسلة الزمنية إلى قسمين متساويين كلما أمكن ذلك.

(٣) يتم تقدير معادلة خط الإتجاه العام للقسم الأول وتستخدم فى ايجاد مجموع مربعات انحرافات القيم الفعلية للظاهرة عن القيم الإتجاهية لها وهى :

$$مجـ\ \hat{ق}_{ر١}^{٢} = مجـ\ (ص_{ر١} - \hat{ص}_{ر١})^{٢}$$

وتكون درجات الحرية هى ($ن_{١} - ٢$) حيث $ن_{١}$ تمثل عدد مفردات الظاهرة للقسم الأول من الفترة الزمنية كلها.

(٤) يتم تقدير معادلة خط الإتجاه العام للقسم الثانى وتستخدم فى ايجاد مجموع مربعات انحرافات القيم الفعلية للظاهرة عن القيم الإتجاهية لها وهى

$$مجـ\ \hat{ق}_{ر٢}^{٢} = مجـ\ (ص_{ر٢} - \hat{ص}_{ر٢})^{٢}$$

وتكون درجات الحرية هى ($ن_{٢} - ٢$) حيث $ن_{٢}$ تمثل عدد مفردات الظاهرة للقسم الثانى من الفترة الزمنية

(٥) تحسب القيم:

$$مجـ\ \hat{ق}_{ر٣}^{٢} = مجـ\ \hat{ق}_{ر١}^{٢} + مجـ\ \hat{ق}_{ر٢}^{٢}$$

بدرجات حرية ($ن_{١} - ٢$) + ($ن_{٢} - ٢$) = $ن_{١} + ن_{٢} - ٤ = ن - ٤$

$$مجـ\ \hat{ق}_{ر٤}^{٢} = مجـ\ \hat{ق}_{ر}^{٢} - مجـ\ \hat{ق}_{ر٣}^{٢}$$

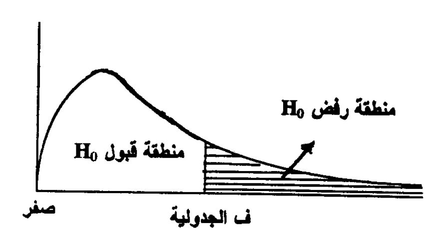
بدرجات حرية = ($ن - ٢$) - [($ن_{١} - ٢$) + ($ن_{٢} - ٢$)] = ٢

وذلك لأن $ن = ن_{١} + ن_{٢}$

(٦) توجد قيمة ف المحسوبة كما يلى:

$$\text{ف المحسوبة} = \frac{\text{مجـ}\ \hat{\text{ق}}^{\text{٢}}_{\text{ر٤}} / \text{٢}}{\text{مجـ}\ \hat{\text{ق}}^{\text{٢}}_{\text{ر٢}} / (\text{ن}_{\text{١}} + \text{ن}_{\text{٢}} - \text{٤})}$$

(٧) توجد قيمة ف من جدول توزيع ف عند درجات الحرية ٢، (ن - ٤) ولمستوى المعنوية α (α عادة ما تكون ٠,٠٥ أو ٠,٠١) ونحدد بها منطقة القبول والرفض للفرض العدمى H_0.



(٨) إذا كانت قيمة ف المحسوبة ≤ ف الجدولية (أى تقع فى منطقة الرفض)، فنرفض الفرض العدمى H_0 ونقبل الفرض البديل H_1 ، أما إذا كانت قيمة ف المحسوبة < ف الجدولية (أى تقع فى منطقة القبول) فنقبل H_0.

مثال (٨)

البيانات التالية تبين أسعار أحد المنتجات (بالجنيه) فى الفترة من ١٩٨٨ حتى ١٩٩٧:

السنة	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧
الأسعار	٣	٥	٤	٦	٧	١٠	١٢	١٥	١٧	٢١

والمطلوب:

١- تقدير معادلة خط الإتجاه العام للأسعار باستخدام طريقة المربعات الصغرى

٢- إختبار ما إذا كان من المناسب أن يسود خط اتجاه عام واحد للفترة كلها أم لا.

٣- التنبؤ بالقيمة الإتجاهية لسعر المنتج عام ١٩٩٩.

الحل

١- لتقدير معادلة خط الإتجاه العام للفترة كلها يلزم تكوين الجدول التالى:

السنة (س)	الأسعار (ص)	س المعدله	س ص	$س^2$	القيم الاتجاهية ($\hat{ص}_ر$)	$\hat{ق}_ر^2$ -($ص_ر$ - $\hat{ص}_ر$)^2
١٩٨٨	٣	٩-	٢٧-	٨١	١,١٨	٣,٣١٢٤
١٩٨٩	٥	٧-	٣٥-	٤٩	٣,١٤	٣,٤٥٩٦
١٩٩٠	٤	٥-	٢٠-	٢٥	٥,١	١,٢١
١٩٩١	٦	٣-	١٨-	٩	٧,٠٦	١,١٢٣٦
١٩٩٢	٧	١-	٧-	١	٩,٠٢	٤,٠٨٠٤
١٩٩٣	١٠	١	١٠	١	١٠,٩٨	٠,٩٦٠٤
١٩٩٤	١٢	٣	٣٦	٩	١٢,٩٤	٠,٨٨٣٦
١٩٩٥	١٥	٥	٧٥	٢٥	١٤,٩	٠,٠١
١٩٩٦	١٧	٧	١١٩	٤٩	١٦,٨٦	٠,٠١٩٦
١٩٩٧	٢١	٩	١٨٩	٨١	١٨,٨٢	٤,٧٥٢٤
المجموع	١٠٠	صفر	٣٢٢	٣٣٠		١٩,٨١٢

$$\hat{أ}_1 = \frac{\text{مجـ } س_ر ص_ر}{\text{مجـ } س_ر^2} = \frac{٣٢٢}{٣٣٠} = ٠,٩٨$$

$$\hat{a} = \frac{\text{مجـ } ص_ر}{ن} = \frac{100}{10} = 10$$

معادلة خط الإتجاه العام للفترة كلها هى:

$$\hat{ص}_ر = 10 + 0.98 \text{ س}_ر \qquad (1)$$

(على أساس أن نقطة الأصل هى ١٩٩٢,٥، وحدة قياس الزمن (س) نصف سنه، وحدة قياس الظاهرة (ص) بالجنيه).

٢- لإختبار ما إذا كان خط الإتجاه العام والذى تم تقديره فى (١) يعد مناسباً لتمثيل الفترة الزمنيه من عام ١٩٨٨ حتى عام ١٩٩٧، أم يفضل تقسيم السلسلة الزمنيه إلى قسمين بحيث يكون لكل قسم معادلة خط اتجاه عام خاص به، يجرى اختبار شو على النحو التالى:

H_0 : ينبغى أن يسود خط اتجاه عام واحد للفترة الزمنيه كلها.

H_1 : من المناسب تقسيم الفترة الزمنيه للسلسلة إلى قسمين ويكون لكل قسم خط اتجاه عام خاص به.

(١) من الجدول السابق تم إيجاد معادلة خط الإتجاه العام للفترة كلها وهى

$$\hat{ص}_ر = 10 + 0.98 \text{ س}_ر$$

كما أن مجموع مربعات البواقى = مجـ $\hat{ق}_ر^2$ = ١٩,٨١٢

ودرجات الحرية المناظرة هى (١٠ - ٢) = ٨

(٢) نقسم السلسلة الزمنيه إلى قسمين متساويين، يبدأ القسم الأول من عام ١٩٨٨ حتى عام ١٩٩٢ ويبدأ القسم الثانى من عام ١٩٩٣ إلى عام ١٩٩٧ ونطبق نفس الخطوات السابقه لكل قسم:

بالنسبه للقسم الأول:

السنة (س)	الأسعار (ص)	س المعدله	س ص	$س^2$	القيم الاتجاهية ($ض_ر$)	$\hat{ق}_{ر_1}^2 = (ص_ر - ض_ر)^2$
١٩٨٨	٣	-٢	-٦	٤	٣,٢	٠,٠٤
١٩٨٩	٥	-١	-٥	١	٤,١	٠,٨١
١٩٩٠	٤	صفر	صفر	صفر	٥	١,٠
١٩٩١	٦	١	٦	١	٥,٩	٠,٠١
١٩٩٢	٧	٢	١٤	٤	٦,٨	٠,٠٤
المجموع	٢٥	صفر	٩	١٠		١,٩

$$\hat{أ}_1 = \frac{\text{مجـ } س_ر ص_ر}{\text{مجـ } س_ر^2} = \frac{٩}{١٠} = ٠,٩$$

$$\hat{أ}_. = \frac{\text{مجـ } ص_ر}{ن_1} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$$

معادلة خط الإتجاه العام للقسم الأول هى:

$ض_ر = ٥ + ٠,٩ \, س_ر$

(على أساس أن نقطة الأصل هى ١٩٩٠، وحدة قياس الزمن (س) سنة واحدة، وحدة قياس الظاهرة (ص) بالجنيه).

كما أن مجـ $\hat{ق}_{ر_1}^2$ = ١,٩، درجات الحريه المناظره هى (٥-٢) = ٣

بالنسبة للقسم الثانى:

السنة (س)	الأسعار (ص)	س المعدله	س ص	$س^2$	القيم الاتجاهية ($ض_ر$)	$\hat{ق}_{ر_2}^2 = (ص_ر - ض_ر)^2$
١٩٩٣	١٠	-٢	-٢٠	٤	٩,٦	٠,١٦
١٩٩٤	١٢	-١	-١٢	١	١٢,٣	٠,٠٩
١٩٩٥	١٥	صفر	صفر	صفر	١٥	صفر
١٩٩٦	١٧	١	١٧	١	١٧,٧	٠,٤٩
١٩٩٧	٢١	٢	٤٢	٤	٢٠,٤	٠,٣٦
المجموع	٧٥	صفر	٤٧	١٠		١,١

$$أ_١ = \frac{مجـ\ س_ر\ ص_ر}{مجـ\ س_ر^٢} = \frac{٢٧}{١٠} = ٢,٧$$

$$أ_. = \frac{مجـ\ ص_ر}{ن_٢} = \frac{٧٥}{٥} = ١٥$$

معادلة خط الإتجاه العام للقسم الثانى هى:

$$\hat{ص}_ر = ١٥ + ٢,٧\ س_ر$$

(على أساس أن نقطة الأصل هى ١٩٩٥، وحدة قياس الزمن (س) سنة واحدة، وحدة قياس الظاهرة (ص) بالجنيه).

كما أن مجـ $\hat{ق}_{ر٢}^٢$= ١,١ ، درجات الحريه المناظره هى (٥-٢) = ٣

(٣) تحسب القيم التالية :

مجـ $\hat{ق}_{ر٣}^٢$ = مجـ $\hat{ق}_{ر١}^٢$ + مجـ $\hat{ق}_{ر٢}^٢$ = ١,٩ + ١,١ = ٣

ودرجات الحريه المناظرة = ٣ + ٣ = ٦

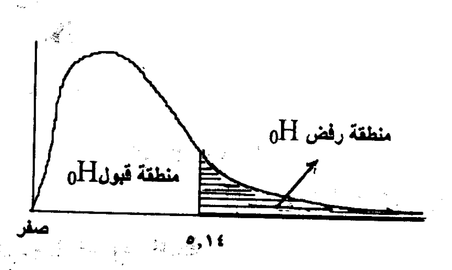
مجـ $\hat{ق}_{ر٤}^٢$ = مجـ $\hat{ق}_{ر}^٢$ + مجـ $\hat{ق}_{ر٣}^٢$ = ١٩,٨١٢ - ٣ = ١٦,٨١٢

ودرجات الحريه المناظرة = (ن - ٢) - [(ن١ -٢) + (ن٢ - ٢)]

= (١٠ -٢) - [(٥-٢) + (٥-٢)] = ٢

$$(٤)\ ف\ المحسوبه = \frac{مجـ\ \hat{ق}_{ر٤}^٢/٢}{مجـ\ \hat{ق}_{ر٣}^٢/٦} = \frac{١٦,٨١٢/٢}{٣/٦} = ١٦,٨١٢$$

(٥) القيمة المستخرجة من جدول توزيع ف عند درجتى الحريه ٢،٦، ولمستوى المعنويه ٠,٠٥ وهى ف (٢، ٦، ٠,٠٥) = ٥,١٤ هى التى تحدد منطقتى القبول والرفض لـ H_0.



(٦) وحيث أن ف المحسوبه = ١٦,٨١٢ > ف الجدوليه = ٥,١٤، لذلك نرفض الفرض العدمى H_0 ونقبل الفرض البديل H_1، أى أننا نقبل الفرض الذى يقضى بأنه لا يمكن تمثيل الفترة المشموله بالدراسة (من عام ١٩٨٨ حتى عام ١٩٩٧) بخط إتجاه عام واحد والذى تمثله المعادلة (١)، وإنما ينبغى أن يمثل الفترة الزمنيه من عام ١٩٨٨حتى عام ١٩٩٢ خط الإتجاه العام الذى تمثله المعادلة (٢) ويمثل الفترة الزمنيه من عام ١٩٩٣ حتى عام ١٩٩٧ خط الإتجاه العام الذى تمثله المعادلة (٣).

٣- لايجاد القيمة الإتجاهيه لسعر المنتج سنة ١٩٩٩، فينبغى استخدام معادلة خط الإتجاه العام للفترة الثانيه (١٩٩٣ - ١٩٩٧) ولا يجوز فى هذه الحاله استخدام أى من معادلتى خط الإتجاه العام للفترة كلها أو للفترة الأولى (١٩٨٨ - ١٩٩٢)، إذن:

القيمة الإتجاهيه للسعر عام ١٩٩٩

= (ص) = ١٥ + ٢,٧ (٤) = ٢٥,٨.

فى حين أنه لو استخدمت معادلة خط الإتجاه العام للفترة كلها فإن:

القيمة الإتجاهيه للسعر عام ١٩٩٩

= (ص) = ١٠+٠,٩٨ (١٣) = ٢٢,٧٤

أما إذا استخدمت معادلة خط الإتجاه العام للفترة الأولى فإن:

القيمة الإتجاهيه للسعر عام ١٩٩٩

= (ص) = ٥ + ٠,٩ (٩) = ١٣,١.

ثانياً: الإتجاه العام غير الخطى

رأينا أن بعض الظواهر تخضع فى تطورها عبر الزمن لإتجاه عام خطى، فى حين يخضع البعض الآخر لإتجاه عام غير خطى، كأن تكون معادلة الإتجاه العام معادلة أسيه أو معادلة لوغاريتميه أو معادلة من الدرجة الثانيه أو الثالثه .... الخ.

وسوف نكتفى فى هذا العرض بدراسة المعادلة الأسيه والمعادلة من الدرجة الثانيه.

I- المعادلة الأسيه (أو نصف اللوغاريتميه)

يأخذ الإتجاه العام لكثير من الظواهر صورة الدالة الأسيه خصوصاً الظواهر التى تنمو عبر الزمن بمعدلات ثابته مثل أعداد السكان أو أعداد خريجى الجامعات أو الناتج القومى وهكذا.

تأخذ المعادلة الأسيه الصوره العامه التاليه:

$$ص_ر = أ.\ (١+م)^{س_ر}\ ق_ر \qquad (١)$$

حيث :

أ. تمثل الجزء المقطوع من محور الصادات

م تمثل معدل النمو فى المتغير التابع ($ص_ر$) لكل فترة زمنيه ($س_ر$)

$ق_ر$ تمثل الخطأ العشوائى

فإذا رمزنا للمقدار (١+م) بالرمز أ, فإن معادلة الإتجاه العام الأسيه تأخذ الصورة:

$$\text{ص}_{ر} = \text{أ}_{.}\ \text{أ}_{1}^{\text{س}_{ر}}\ \text{ق}_{ر} \qquad (٢)$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين ينتج أن:

$$\text{لوص}_{ر} = \text{لوأ}_{.} + \text{س}_{ر}\ \text{لوأ}_{1} + \text{لوق}_{ر} \qquad (٣)$$

أى أن المعادلة الأسيه تحولت إلى معادلة خطيه فى لوغاريتمات ص بينما س مازالت كما هى تمثل متواليه عدديه، لذلك يطلق على هذه المعادلة فى بعض الأحيان معادلة نصف لوغاريتميه.

فإذا اعتبرنا أن:

$$\text{لوص}_{ر} = \text{ص}'_{ر}$$

$$\text{لو أ}_{.} = \text{أ}'_{.}$$

$$\text{لو أ}_{1} = \text{أ}'_{1}$$

$$\text{لوق}_{ر} = \text{ق}'_{ر}$$

فإن المعادلة (٣) تأخذ الصورة الخطيه التالية:

$$\text{ص}'_{ر} = \text{أ}'_{.} + \text{أ}'_{1}\ \text{س}_{ر} + \text{ق}'_{ر} \qquad (٤)$$

ويمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى فى تقدير معالم هذه المعادله ($\text{أ}'_{.}$ ، $\text{أ}'_{1}$) كما سبق أن بينا، حيث:

$$\hat{\text{أ}}'_{1} = \text{لو}\ \hat{\text{أ}}_{1} = \frac{\text{مجـ س}_{ر}\ \text{ص}'_{ر} - \dfrac{\text{مجـ س}_{ر} \times \text{مجـ ص}'_{ر}}{\text{ن}}}{\text{مجـ س}_{ر}^{2} - \dfrac{(\text{مجـ س}_{ر})^{2}}{\text{ن}}}$$

$$\hat{\text{أ}}'_{.} = \text{لو}\ \hat{\text{أ}}_{.} = \overline{\text{ص}'} - \hat{\text{أ}}'_{1}\ \overline{\text{س}}$$

ويمكن تبسيط تقديرات المربعات الصغرى بأن نجعل نقطة الأصل (س = صفر) فى منتصف السلسلة الزمنيه وترقم الفترات الزمنية بالنسبة لنقطة الأصل بالسالب والموجب بحيث يكون مجـ $س_ر$ = صفر فتصبح تقديرات المربعات الصغرى حينئذ كما يلى:

$$\hat{أ}'_1 = \frac{\text{مجـ } س_ر \, ص'_ر}{\text{مجـ } س_ر^2}$$

$$\hat{أ}'_. = \overline{ص}'$$

وبذلك تكون معادلة الاتجاه العام هى

$$\hat{ص}'_ر = \hat{أ}'_. + \hat{أ}'_1 س_ر$$

والتى يسهل تحويلها إلى صورتها الأسية كما يلى:-

$$\hat{ص}'_ر = \hat{أ}_. \; \hat{أ}_1^{س_ر}$$

مثال (٩)

البيانات التاليه تبين قيمة الإستهلاك السنوى من الكهرباء بأحد المصانع (بالألف جنيه) خلال الفترة من ١٩٩٠ - ١٩٩٦:

السنة	١٩٩٠	١٩٩١	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦
الإستهلاك	٣٢	٣٥	٤٠	٤٤	٥٠	٥٣	٥٨

والمطلوب:-

١- تقدير معادلة الإتجاه العام بفرض أنها أسية.

٢- معدل النمو السنوى فى إستهلاك المصنع من الكهرباء.

٣- التنبؤ بقيمة المستهلك من الكهرباء فى المصنع عام ٢٠٠٠.

الحل

١- معادلة الإتجاه العام المقدرة فى صورتها الأسيه هى:

$$\hat{ص}_ر = أ_. \; أ_١^{س_ر}$$

إذن:

$$لو \; \hat{ص}_ر = لو \; أ_. + س_ر \; لو \; أ_١$$

والتى يمكن كتابتها على الصورة:

$$\hat{ص}'_ر = أ'_. + أ'_١ س_ر$$

وللحصول على التقديرين $أ'_.$ ، $أ'_١$ نكون الجدول التالى:

السنه (سر)	الاستهلاك (صر)	سر المعدلة	ص/ر= لوصر	سر ص/ر	س٢ر
١٩٩٠	٣٢	-٣	١,٥٠٥٢	-٤,٥١٥٦	٩
١٩٩١	٣٥	-٢	١,٥٤٤١	-٣,٠٨٨٢	٤
١٩٩٢	٤٠	-١	١,٦٠٢١	-١,٦٠٢١	١
١٩٩٣	٤٤	صفر	١,٦٤٣٥	صفر	صفر
١٩٩٤	٥٠	١	١,٦٩٩٠	١,٦٩٩٠	١
١٩٩٥	٥٣	٢	١,٧٢٤٣	٣,٤٤٨٦	٤
١٩٩٦	٥٨	٣	١,٧٦٣٤	٥,٢٩٠٢	٩
المجموع			١١,٤٨١٦	١,٢٣١٩	٢٨

$$أ'_١ = \frac{مجـ \; س_ر \; ص'_ر}{مجـ \; س_ر^٢} = \frac{١,٢٣١٩}{٢٨} = ٠,٠٤٤$$

$$أ'_. = \frac{مجـ \; ص'_ر}{ن} = \frac{١١,٤٨١٦}{٧} = ١,٦٤٠٢$$

وتكون معادلة الإتجاه العام لـ $ص'_ر$ (أى لـ لوص$_ر$) على س$_ر$ هى:

$ص'_ر$ = لو ص$_ر$ = ١,٦٤٠٢ + ٠,٠٤٤ س$_ر$

(على أساس أن سنة ١٩٩٣ تمثل نقطة الأصل، وحدة قياس الزمن سنة واحدة، وحدة قياس $ص'_ر$ بالألف جنيه).

ويمكن وضع هذه المعادلة فى الصورة الأسيه بإستخدام لوغاريتمات الأعداد المقابلة، فحيث أن:

$أ'_٠$ = لو $أ_٠$ = ١,٦٤٠٢

فمن جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن:

$أ_٠$ = ٣٤,٦٧

بالمثل، فحيث أن:

$أ'_١$ = لو $أ_١$ = ٠,٠٤٤

فمن جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن:

$أ_١$ = ١,١٠٦

وتكون معادلة الإتجاه العام للإستهلاك فى صورتها الأسيه هى:

ص$_ر$ = ٤٣,٦٧ $(١,١٠٦)^{س_ر}$

(على أساس أن سنة ١٩٩٣ هى نقطة الأصل، وحدة قياس الزمن سنة واحدة، وحدة قياس ص$_ر$ بالألف جنيه)

٢- لإيجاد معدل النمو السنوى فى قيمة الإستهلاك فإن:

$أ_١$ = ١ + م = ١,١٠٦

إذن:

معدل النمو السنوى فى الإستهلاك (م) = ١٠,٦٪

٣- القيمة الإتجاهيه لإستهلاك المصنع من الكهرباء عام ٢٠٠٠

$= ٤٣,٦٧ \ (١,٠٦)^{٧} = ٨٨,٤٠٣٤$

II- المعادلة من الدرجة الثانية

معادلة الإتجاه العام من الدرجة الثانية تأخذ الصوره:

$$ص_{ر} = أ_{.} + أ_{١} س_{ر} + أ_{٢} س^{٢}_{ر} + ق_{ر} \qquad (١)$$

المعادلة (١) معادلة غير خطيه ويمكن تحويلها إلى معادلة خطيه، فإذا اعتبرنا أن $س = س_{١}$ ، $س^{٢} = س_{٢}$، فإن المعادلة (١) تأخذ الصورة التاليه:

$$ص_{ر} = أ_{.} + أ_{١} س_{١ر} + أ_{٢} س_{٢ر} + ق_{ر} \qquad (٢)$$

المعادلة (٢) معادلة انحدار خطيه للمتغير التابع $ص_{ر}$ على المتغيرين المستقلين $س_{١ر}$، $س_{٢ر}$ ويمكن تقدير معالمها الثلاثة $أ_{.}$، $أ_{١}$، $أ_{٢}$ بإستخدام طريقة المربعات الصغرى والتى نحصل منها على المعادلات الطبيعية الثلاثة التاليه:

$$مجـ ص = ن \hat{أ}_{.} + \hat{أ}_{١} مجـ س_{١} + \hat{أ}_{٢} مجـ س_{٢} \qquad (٣)$$

$$مجـ س_{١}ص = \hat{أ}_{.} مجـ س_{١} + \hat{أ}_{١} مجـ س^{٢}_{١} + \hat{أ}_{٢} مجـ س_{١} س_{٢} \qquad (٤)$$

$$مجـ س_{٢}ص = \hat{أ}_{.} مجـ س_{٢} + \hat{أ}_{١} مجـ س_{١} س_{٢} + \hat{أ}_{٢} مجـ س^{٢}_{٢} \qquad (٥)$$

وبحل المعادلات الثلاثه معاً نحصل على قيم التقديرات $\hat{أ}_{.}$، $\hat{أ}_{١}$، $\hat{أ}_{٢}$ وتصبح معادلة الإتجاه العام للظاهرة هى:

$$ص_ر = أ_. + أ_1 س_{1ر} + أ_2 س_{2ر} \qquad (٦)$$

وبالتعويض عن $س_{1ر} = س_ر$، $س_{2ر} = س_ر^2$ تأخذ المعادلة (٦) شكلها النهائى وهو:

$$ص_ر = أ_. + أ_1 س_ر + أ_2 س_ر^2 \qquad (٧)$$

مثال (١٠)

استخدم البيانات الواردة فى المثال (٩) فى إيجاد معادلة الإتجاه العام للإستهلاك بفرض أنها من الدرجه الثانيه.

الحل

لإيجاد التقديرات $أ_.$ ، $أ_1$، $أ_2$ من المعادلات (٣)، (٤)، (٥) يلزم تكوين الجدول التالى:

السنه (س)	الإستهلاك (ص)	س المعدلة س = $س_1$	$س^2 = س_2$	$س_1^2$	$س_2^2$	$س_1$ص	$س_2$ص	$س_1 س_2$
١٩٩٠	٣٢	-٣	٩	٩	٨١	-٩٦	٢٨٨	-٢٧
١٩٩١	٣٥	-٢	٤	٤	١٦	-٧٠	١٤٠	-٨
١٩٩٢	٤٠	-١	١	١	١	-٤٠	٤٠	-١
١٩٩٣	٤٤	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
١٩٩٤	٥٠	١	١	١	١	٥٠	٥٠	١
١٩٩٥	٥٣	٢	٤	٤	١٦	١٠٦	٢١٢	٨
١٩٩٦	٥٨	٣	٩	٩	٨١	١٧٤	٥٢٢	٢٧
المجموع	٣١٢	صفر	٢٨	٢٨	١٩٦	١٢٤	١٢٥٢	صفر

بالتعويض فى المعادلات الطبيعيه (٣)، (٤)، (٥) عن المجاميع المختلفه ينتج أن:

$٣١٢ = ٧\, أ_{٠} + ٢٨\, أ_{٢}$ (٦)

$١٢٤ = ٢٨\, أ_{١}$ (٧)

$١٢٥٢ = ٢٨\, أ_{٠} + ١٩٦\, أ_{٢}$ (٨)

من المعادلة (٧) مباشرة نجد أن $أ_{١} = ٤,٤٢٩$

وبحل المعادلتين (٦)، (٨) معاً (بضرب المعادلة (٦) فى ٤ ثم طرح الناتج من المعادلة (٨)) ينتج أن:

$٤ = ٨٤\, أ_{٢}$

$أ_{٢} = ٠,٠٤٨$

وبالتعويض عن قيمة $أ_{٢} = ٠,٠٤٨$ فى المعادلة (٦) مثلاً نجد أن:

$٣١٢ = ٧\, أ_{٠} + ٠,٠٤٨\, (٢٨)$ (٦)

$٧\, أ_{٠} = ٣١٠,٥٦$ ومنها ينتج أن $أ_{٠} = ٤٤,٣٧٩$

وتكون معادلة الإتجاه العام هى:

$\hat{ص}_{ر} = ٤٤,٣٧٩ + ٤,٤٢٩\, س_{١ر} + ٠,٠٤٨\, س_{٢ر}$

وبالتعويض عن $س_{١ر} = س_{ر}$ & $س_{٢ر} = س_{ر}^{٢}$ فإن معادلة الإتجاه العام من الدرجه الثانيه تأخذ الصورة:

$\hat{ص}_{ر} = ٤٤,٣٧٩ + ٤,٤٢٩\, س_{ر} + ٠,٠٤٨\, س_{ر}^{٢}$

(على أساس أن سنة ١٩٩٣ هى نقطة الأصل، وحدة قياس الزمن (س) سنه واحده، وحدة قياس الإستهلاك (ص) الألف جنيه).

ثالثاً: تخليص السلسلة الزمنيه من أثر الإتجاه العام

بعد حساب معادلة الإتجاه العام للظاهرة سواء كانت معادلة خطيه أو غير خطيه فإنها تستخدم فى إيجاذ القيم الإتجاهيه للظاهرة والتى تصف قيمة الظاهرة فيما لو لم تكن الظاهرة خاضعه إلا للإتجاه العام فقط، وبوضع القيم الإتجاهيه للظاهرة فى مواجهة القيم الأصلية لها يمكن تخليص القيم الأصليه من أثر الإتجاه العام فلا يبقى سوى أثر التغيرات الموسمية والدورية والعرضيه على الظاهرة المدروسة ومن ثم يسهل فصلها أو التقليل من آثارها على الظاهرة فى المستقبل.

وتخليص السلسلة الزمنيه من أثر الإتجاه العام يتوقف على النموذج الرياضى الذى تتبعه الظاهرة، ففى حالة النموذج التجميعى والذى يفترض أن قيمة الظاهرة (ص) فى أى فترة زمنيه ناتجه عن حاصل جمع الإتجاه العام (جـ) والتغيرات الموسميه (م) والتغيرات الدوريه (د) والتغيرات العرضية (ع)، أى أن:

ص = جـ + م + د + ع

فتخليص السلسلة الزمنية من أثر الإتجاه العام (جـ) يتم ببساطة بطرح قيمة الاتجاه العام من كلا الطرفين وبذلك نحصل على قيمة الظاهرة متأثرة فقط بالتغيرات الموسمية والدوريه والعرضية.

أما فى حالة النموذج الضربى والذى يفترض أن قيمة الظاهرة فى أى فترة زمنية عبارة عن حاصل ضرب التغيرات الأربع سالفة الذكر، بمعنى أن:

ص = جـ × م × د × ع

فإن تخليص السلسلة الزمنية من أثر الإتجاه العام يتـم بقسـمة كـل مـن طرفـى المعادلة السابقة علـى قيمـة الإتجـاه العـام (جـ) فنحصـل علـى قيمـة الظـاهرة متـأثرة بغير الإتجـاه العـام أى متـأثرة فقـط بــالتغيرات الموسـمية والدوريـة والعرضية.

وجدير بالذكر أنه إذا كانت بيانات السلسلة الزمنيه سنويه أى لفـترات زمنيه طول كل منها سنه كاملة فإنها لـن تظهـر أثـر التغيرات الموسـميه لأن التغيرات الموسميه لا تظهر إلا لفترات زمنيه أقل من سنه كـأن تكـون الفـترة يوماً أو أسبوعاً أو شهراً أو ربع سنة وهكذا، ومـن ثـم فـإن تخليـص السلسـلة الزمنيه فى هذه الحاله من أثر الإتجاه العام سوف يعطى قيمة الظاهرة متـأثرة فقط بالتغيرات الدوريه والعرضيه.

مثال (١١)

فيما يلى قيمة الإيداعات الشـهرية (بـالمليون جنيـه) بـأحد البنـوك فـى الفترة من يناير حتى سبتمبر من عام ١٩٩٧:

الشهر	يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيه	يوليو	أغسطس	سبتمبر
الإيداعات	٣	٤	٤,٥	٦	٤,٥	٨	١٠	٨	٦

والمطلوب:

١- إيجاد معادلة الإتجاه العام للإيداعات بفرض أنها خطيه.

٢- تخليص السلسلة الزمنيه مـن أثـر الإتجـاه العـام بفـرض أن السلسـله تتبـع النموذج الضربى.

الحل

١- معادلة الإتجاه العام الخطى هى:

صَ ر = أ . + أ ١ س ر

وللحصول على التقديرين أ . ، أ ١ نكون الجدول التالى:

الشهر (س) (١)	الإيداعات =جـ×م×د×ع (٢)	س المعدله (٣)	س ص (٤)	س٢ (٥)	القيم الإتجاهيه صَ ر = جـ (٦)	القيمة الاصلية ÷ القيمة الإتجاهيه = م × د × ع (٧)	النسبه المئويه (٨)
يناير	٣	٤-	١٢-	١٦	٣,٥٣٢	٠,٨٤٩٤	٨٤,٩٤٪
فبراير	٤	٣-	١٢-	٩	٤,١٤٩	٠,٩٦٤١	٩٦,٤١٪
مارس	٤,٥	٢-	٩-	٤	٤,٧٦٦	٠,٩٤٤٢	٩٤,٤٢٪
أبريل	٦	١-	٦-	١	٥,٣٨٣	١,١١٤٦	١١١,٤٦٪
مايو	٤,٥	صفر	صفر	صفر	٦	٠,٧٥٠٠	٧٥,٠٠٪
يونيه	٨	١	٨	١	٦,٦١٧	١,٢٠٩٠	١٢٠,٩٠٪
يوليو	١٠	٢	٢٠	٤	٧,٢٣٤	١,٣٨٢٤	١٣٨,٢٤٪
أغسطس	٨	٣	٢٤	٩	٧,٨٥١	١,٠١٩٠	١٠١,٩٠٪
سبتمبر	٦	٤	٢٤	١٦	٨,٤٦٨	٠,٧٠٨٥	٧٠,٨٥٪
المجموع	٥٤	صفر	٤٣	٦٠			

$$\text{أ}_1 = \frac{\text{مجـ س}_\text{ر}\text{ ص}_\text{ر}}{\text{مجـ س}^2_\text{ر}} = \frac{43}{60} = 0.617$$

$$\text{أ}_. = \frac{\text{مجـ ص}_\text{ر}}{\text{ن}} = \frac{54}{9} = 6$$

وتكون معادلة الإتجاه العام للإيداعات هى:

صَ ر = ٦ + ٠,٦١٧ س ر

(على أساس أن شهر مايو يمثل نقطة الأصل أو شهر الأساس، وحدة قياس الزمن (س) شهر واحد، وحدة قياس (ص) المليون جنيه).

٢- من معادلة خط الإتجاه العام يمكن الحصول على القيم الإتجاهيه فى شهور السلسله والموضحه بالعمود رقم (٦) بالجدول السابق، حيث تم التعويض فى المعادلة عن قيمة س المعدلة المناظرة لكل شهر من شهور السلسلة، فمثلاً:

القيمة الإتجاهيه فى شهر فبراير

$$= ص_٢ = ٦ + ٠,٦١٧ (-٣) = ٤,١٤٩$$

القيمة الإتجاهيه فى شهر يوليو

$$= ص_٧ = ٦ + ٠,٦١٧ (٢) = ٧,٢٣٤$$

وهكذا.

ويتم تخليص السلسله الزمنيه من أثر الإتجاه العام بقسمة القيم الأصليه للظاهرة على القيم الإتجاهيه المناظرة لها فنحصل على قيمة الظاهرة متأثرة فقط بالتغيرات الموسميه والدوريه والعرضيه كما يتضح فى العمود (٧) من الجدول السابق.

ولسهولة العرض يتم التعبير عن قيمة الظاهرة بعد تخليصها من أثر الإتجاه العام فى شكل نسبة مئوية كما يظهر فى عمود (٨) من الجدول. ويمكن تفسير هذه النسب: ففى شهر فبراير مثلاً كانت النسبه هى ٩٦,٤١٪ ويعنى هذا أن القيمه الفعليه للإيداعات فى هذا الشهر كانت أقل من القيمة الإتجاهيه لها بنسبة ٣,٥٩٪، هذه الـ ٣,٥٩٪ هى قيمة التغيرات الموسميه والدوريه والعرضيه. وفى شهر يوليو، مثلاً، بلغت النسبه المئويه ١٣٨,٢٤٪

ويعنى هذا أن القيمه الفعليه للإيداعات فى هذا الشهر كانت أكبر من القيمة الإتجاهيه لها بنسبة ٣٨,٢٤٪ وهذه الزيادة هى قيمة التغيرات الموسمية والدورية والعرضية.

وجدير بالذكر أنه إذا كانت إحدى النسب المئويه بالعمود (٨) تساوى ١٠٠٪ فيعنى ذلك أن القيمه الفعليه للظاهرة تساوى تماما القيمة الإتجاهيه لها أو بمعنى آخر فإن الظاهرة فى هذا الشهر لم تكن خاضعه للتغيرات الموسميه والدورية والعرضية مجتمعة أو منفرده.

٥ التغيرات الموسميه

كما سبق أن ذكرنا فإن التغيرات الموسميه هى تغيرات منتظمه قصيرة الأجل تتأثر بها الظاهرة خلال فترات زمنيه أو مواسم معينه على مدى العام ولها صفة الدوريه سنوياً وليس لها صفة التراكم كما فى حالة الإتجاه العام.

وكلمة موسم هنا لا يقتصر معناها على فصل من فصول السنه وإنما يمكن أن تكون ساعة أو يوماً أو أسبوعاً أو شهراً أو أى وحدة زمنيه أخرى بشرط ألا يزيد طول الدوره المتكرره عن سنه واحدة على الأكثر. فإزدحام المواصلات يبلغ ذروته فى أوقات الصباح ومواعيد خروج الموظفين من مكاتبهم كل يوم (ماعدا يوم الجمعه)، كما أن حركة التعامل فى البنوك تزيد فى الأيام الأولى من كل شهر، ويزداد الطلب على الملابس الجديدة فى فترات الأعياد ودخول المدارس، بالمثل، يزداد الطلب على المشروبات المثلجه والأيس كريم خلال فصل الصيف وهكذا. فمثل هذه التغيرات

الموسميه تتميز بصفة الإنتظام فى حدوثها من فترة لأخرى إلى جانب امكانية التنبؤ بها كل فترة.

وترجع التغيرات الموسميه إلى أسباب عديده منها التغيرات المناخيه المرتبطه بفصول السنه أو المناسبات الدينيه والأعياد أو العوامل الإجتماعيه من عادات وتقاليد المجتمع والتى تؤثر بدورها على عادات الإستهلاك ومن ثم على الطلب على السلع والخدمات.

ولاشك أن دراسة التغيرات الموسميه وقياسها واستبعاد أثرها من الظواهر المختلفه يفيد مدير المشروع أو متخذ القرار فى تخطيط سياسات الإنتاج أو التخزين أو الإعلان عن السلع والخدمات، فيتعين، مثلاً، على هيئة النقل العام زيادة عدد الحافلات وتكثيف الخدمه فى ساعات الذروة، كما تخطط البنوك، مثلاً، بما يضمن زيادة حجم الأموال السائلة لديها ومنع أجازات موظفيها فى الأيام الأولى من كل شهر، وإذا تبين لمدير أحد المشروعات انخفاض الطلب على سلعة معينه فى موسم معين من كل عام فإن ذلك يكون مدعاة للمدير للقيام بحملة مكثفه للدعاية والإعلان عن السلعة أو لخفض سعرها لتنشيط المبيعات من السلعة خلال هذا الموسم أو مدعاة لإنتاج سلعة أخرى فى هذا الموسم يعوض المشروع عن إنخفاض الطلب على السلعة الأولى.

(٥-١) قياس التغيرات الموسميه

لقياس التغيرات الموسميه ومعرفة آثارها منفرده على الظاهرة المدروسة فإنه يلزم التخلص من أثر الإتجاه العام والتغيرات الدوريه

والعرضيه ويتم ذلك بتكوين رقم قياسي يسمى بدليل التغيرات الموسميه أو الدليل الموسمى Seasonal Index.

والدليل الموسمى لأى شهر (أو فصل) يعبر عن نسبة قيمة الظاهرة محل الدراسة فى الشهر (أو الفصل) المذكور إلى قيمة الظاهرة فى الشهر (أو الفصل) المتوسط من العام وهو يقيس بذلك التغيرات الموسميه لكل شهر (أو فصل) معبراً عنها كنسبه من المتوسط الشهرى (أو الفصلى) العام، فإذا كان الدليل الموسمى للفصل الأول من العام يساوى ٩٦٪ فيعنى ذلك أن العوامل الموسميه السائدة خلال هذا الفصل من العام تجعل قيمة الظاهرة فى هذا الفصل أقل من القيمة المتوسطة لها خلال العام بمقدار ٤٪.

ويوجد عدة طرق لإيجاد الدليل الموسمى نتناولها فيما يلى بالتفصيل:

الطريقة الأولى: طريقة النسب المئويه للمتوسطات (الطريقة الأوليه)

وتتلخص هذه الطريقة فى الخطوات التاليه:

(١) يحسب الوسط الحسابى لقيم الظاهرة فى الفترات الموسميه المتشابهه من السلسلة الزمنيه، بمعنى حساب الوسط الحسابى لقيم الظاهرة للأشهر المعينه فى السنوات المختلفة إذا كانت الفترة الموسميه هى الشهر أو الوسط الحسابى للفصول المعينه فى السنوات المختلفه إذا كانت الفترة الموسميه هى الفصل وهكذا فيحسب الوسط الحسابى لبيانات شهور يناير (أو للفصل الأول) فى جميع السنوات وليكن $\bar{س}_١$، الوسط الحسابى لبيانات شهور فبراير (أو للفصل الثانى) فى جميع السنوات وليكن $\bar{س}_٢$ وهكذا بالنسبة لباقى شهور (أو فصول) السنه، ويؤدى ذلك بالطبع إلى تخليص البيانات من تأثير التغيرات الدوريه وبعض التغيرات العرضيه.

وفى حالة وجود قيم شاذة للظاهرة فى بعض الفترات الموسميه فيمكن تلافى آثارها إما بإستخدام الوسيط بدلاً من الوسط الحسابى، إذ أن الوسيط لا يتأثر بالقيم الشاذة، أو باستبعاد القيم المتطرفه ويحسب الوسط الحسابى لباقى القيم.

(٢) يتم ايجاد الوسط الحسابى لجميع قيم $\overline{س}_ر$ والذى يسمى بمتوسط المتوسطات والذى نشير اليه بالرمز $\overline{\overline{س}}$ حيث:

$$\overline{\overline{س}} = \frac{مجـ \ \overline{س}_ر}{ن}$$

(٣) يستخرج الدليل الموسمى لكل شهر من شهور السنه (فصل من فصول السنه) وذلك بحساب نسبة الوسط الحسابى لكل شهر (أو فصل) إلى متوسط المتوسطات وضرب الناتج فى ١٠٠، أى أن:

$$\text{الدليل الموسمى للشهر (للفصل) الرائى} = م_ر = \frac{\overline{س}_ر}{\overline{\overline{س}}} \times ١٠٠$$

وحيث أن التغيرات الموسميه تلغى بعضها البعض على مدى العام، لذلك فإن الدليل الموسمى لابد وأن يتعادل متوسطه على مدار السنه مع ١٠٠ فيكون مجموع النسب المئويه للمتوسطات الحسابيه أى مجموع الأدله الموسميه لكل الفترات الموسميه مساويا لـ ١٠٠م، حيث م تشير إلى عدد الفترات الموسميه فى العام. فيكون المجموع مساويا لـ ١٢٠٠ فى حالة ما إذا كانت الفترة الموسميه هى الشهر ويكون مساويا لـ ٤٠٠ فى حالة ما إذا كانت الفترة الموسميه هى ربع السنه وهكذا. فإذا لم يكن مجموع الأدله الموسميه مساويا لـ ١٠٠م فيجب تعديل الدليل الموسمى لكل فترة موسميه بحيث يكون مجموعها هو ١٠٠م، ويتم التعديل كالآتى:

يحسب معامل تصحيح كما يلى:

$$\text{معامل التصحيح} = \frac{١٠٠م}{\text{مجموع نسب المتوسطات غير المعدله لجميع الفترات الموسميه}}$$

ويكون

الدليل الموسمى المعدل للفترة الموسميه

= الدليل الموسمى غير المعدل للفترة الموسميه × معامل التصحيح.

مثال (١٢)

البيانات التاليه تبين أسعار أحد الحاصلات الزراعيه (بالجنيه) فى كل ربع سنه فى الفتره من ١٩٩٣ - ١٩٩٧:

الربع	الأسعارفى كل سنه				
	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧
الأول	٢٠	٢٢	٢٤	٢٥	٢٧
الثانى	٢٤	٢٣	٢٧	٣٠	٣٢
الثالث	١٨	٢٠	٢١	٢٥	٢٦
الرابع	٣٠	٢٧	٣١	٣٢	٣٤

والمطلوب إيجاد الدليل الموسمى لكل ربع سنه على مدى الخمس سنوات بالطريقة الأوليه:

الحل:

يتم إيجاد مجاميع الأسعار لكل ربع سنه فى جميع السنوات ويستخدم فى إيجاد الوسط الحسابى لكل ربع وهو $\bar{س}_ر$ (ر = ١،٢،٣،٤) ويحسب بعد

ذلك متوسط المتوسطات وهو $\bar{\bar{س}} = \frac{مجـ \bar{س}_ر}{٤}$ وذلك على النحو التالى:

الربع	الأسعار فى كل سنه					الوسط الحسابى للربع سنه $\bar{س}_ر$	الدليل الموسمى
	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧		
الأول	٢٠	٢٢	٢٤	٢٥	٢٧	٢٣,٦	٩١,١٢٪
الثانى	٢٤	٢٣	٢٧	٣٠	٣٢	٢٧,٢	١٠٥,٠٢٪
الثالث	١٨	٢٠	٢١	٢٥	٢٦	٢٢	٨٤,٩٤٪
الرابع	٣٠	٢٧	٣١	٣٢	٢٤	٣٠,٨	١١٨,٩٢٪

$$\text{متوسط المتوسطات } (\bar{\bar{س}}) = \frac{٢٣,٦ + ٢٧,٢ + ٢٢ + ٣٠,٨}{٤} = ٢٥,٩$$

يتم إيجاد الدليل الموسمى لكل ربع سنه بإيجاد نسبة متوسـط الأسـعار لكل ربع سنه إلى متوسط المتوسطات والضرب فى ١٠٠، فمثلاً:

$$\text{الدليل الموسمى للربع الأول} = \frac{٢٣,٦}{٢٥,٩} \times ١٠٠ = ٩١,١٢$$

$$\text{الدليل الموسمى للربع الثانى} = \frac{٢٧,٢}{٢٥,٩} \times ١٠٠ = ١٠٥,٠٢ \text{ وهكذا،}$$

وحيث أن مجموع الأدلة الموسميه للفترات الأربعة = ٤٠٠، فلسنا فى حاجه إلى إجراء أى تعديل عليها.

فالدليل الموسمى للأسعار فى الربع الأول من العام = ٩١,١٢٪ يعنى أن العوامل الموسميه السائدة خلال هذه الفترة تجعل أسعار هذا الربع تسـاوى ٩١,١٢٪ من أسعار الربع المتوسط، أو بمعنى آخر فـإن العوامـل الموسـميه

السائدة خلال هذا الربع من العام تجعل قيمة الأسعار فى هذا الربع أقل من القيمة المتوسطه لها خلال العام بمقدار ٨،٨٨٪.

ويعاب على الطريقة الأولية لقياس التغيرات الموسميه تجاهلها للإتجاه العام للسلسلة الزمنيه، لذلك تأتى الطرق التاليه وتحاول تلافى هذا العيب حيث تعتمد على ايجاد متوسط النسب بين القيم الفعليه للظاهرة والقيم الإتجاهيه لها، ولكنها تختلف فيما بينها فى كيفية تقدير القيم الإتجاهيه للظاهرة، فالطريقة الثانيه – كما سنرى – تستخدم المتوسطات المتحركة كقيم اتجاهيه بينما تعتمد الطريقة الثالثة على حساب القيم الإتجاهيه من معادلة الإتجاه العام المتحصل عليها بطريقة المربعات الصغرى.

الطريقة الثانيه: طريقة نسبة القيم الفعليه إلى المتوسطات المتحركه

تتلخص هذة الطريقة فى الخطوات التاليه:

(١) يحسب المتوسط المتحرك لفترة زمنيه يفضل أن يكون طولها مساوياً لعدد الفترات الموسميه فى العام (وهى ١٢ إذا كان الموسم شهراً أو ٤ إذا كان الموسم ربع سنوى وهكذا) وذلك لضمان أن تكون هذه المتوسطات المتحركه خاليه إلى حد كبير من أثر الموسم. وفى حالة ما إذا كان عدد القيم فى المجموعة زوجى فإن المتوسطات المتحركة (أى القيم الإتجاهيه) سوف لا تقع فى مواجهة القيم الفعليه للظاهرة، لذلك يتم حساب المتوسطات المتحركه الممركزه – كما سبق أن بينا فى إيجاد المتوسطات المتحركه لفترات زمنيه عددها زوجى – ولا شك أن إيجاد المجموع ثم المتوسط المتحرك سوف يؤدى إلى التخلص من معظم التغيرات العرضيه فى السلسله الزمنيه.

(٢) يعبر عن القيم الفعليه للظاهرة كنسبه مئويه من المتوسطات المتحركه (أو المتوسطات المتحركـه الممركزه) المقابلـه لهـا وذلـك فـى حالـة النمـوذج الضربـى للسلسـلة الزمنيـه (أو كفـروق بيـن القيـم الفعليـه والمتوسـطات المتحركه المقابله لها فى حالة النموذج الجمعـى للسلسـلة الزمنيـه) وذلـك لتخليص القيم الفعليه من أثر الإتجاه العام مع مراعاة حـذف القيـم الفعليـه مـن السلسـلة التـى لا يوجـد فـى مواجهتهـا متوسـطات متحركـه (أو متوسطات متحركه ممركزه)

(٣) يحسـب الوسـط الحسـابى للنسـب المئويـه المسـتخرجه فـى الخطـوه (٢) للفترات الموسميه المتقابله فى السنوات المختلفه للسلسلة الزمنيه (أى لكل شهر أو لكل ربع سنه أو لكل ثلث سنه وهكذا) ويتم بذلك تخليص بيانـات السلسلة الزمنيه إلى حد كبير من أثر التغيرات الدوريه وبعض التغيرات العرضيه، وبذلك فإن الوسط الحسابى المسـتخرج للفترة الموسـميه يمثـل الدليل الموسمى لهذه الفترة.

وبنفس المنطق السابق فإذا كان مجموع الأدلة الموسميه لكل الفـترات الموسميه لا يساوى ١٠٠م فيجب تعديل الدليل الموسمى لكل فترة عن طريـق ضربة فى معامل التصحيح كما أوضحنا فى الطريقة الأولى.

مثال (١٣)

استخدم البيانـات الـوارد فـى مثـال (١٢) فـى ايجـاد الدليـل الموسـمى للأسعار باستخدام طريقة نسبة القيم الفعلية الى المتوسطات المتحركة.

الحل

سوف يتم تفريغ بيانات الجدول فى مثـال (١٢) عموديـاً بالنسبه لكـل ربع سنه من سنوات السلسله ثم توجد المتوسـطات المتحركـه لفترة طولهـا ٤

أرباع السنه ومن ثم نوجد المتوسطات المتحركه الممركزه حتى تقع في مواجهة القيم الأصليه للأسعار وذلك على النحو التالي:

السنه	الربع سنة	الأسعار (القيم الفعليه)	المجاميع المتحركه لمدة ٤ أرباع سنه	المتوسطات المتحركه	المتوسطات المتحركه الممركزه	القيم الفعلية كنسبه من المتوسطات المتحركه
١٩٩٣	الأول	٢٠				
	الثانى	٢٤	٩٢	٢٣		
	الثالث	١٨	٩٤	٢٣,٥	٢٣,٢٥	٧٧,٤١٩
	الرابع	٣٠	٩٣	٢٣,٢٥	٢٣,٣٧٥	١٢٨,٣٤٢
١٩٩٤	الاول	٢٢	٩٥	٢٣,٧٥	٢٣,٥	٩٣,٦١٧
	الثانى	٢٣	٩٢	٢٣	٢٣,٣٧٥	٩٨,٣٩٦
	الثالث	٢٠	٩٤	٢٣,٥	٢٣,٢٥	٨٦,٢٢
	الرابع	٢٧	٩٨	٢٤,٥	٢٤	١١٢,٥
١٩٩٥	الأول	٢٤	٩٩	٢٤,٧٥	٢٤,٦٢٥	٩٧,٤٦٢
	الثانى	٢٧	١٠٣	٢٥,٧٥	٢٥,٢٥	١٠٦,٩٣١
	الثالث	٢١	١٠٤	٢٦	٢٥,٨٧٥	٨١,١٥٩
	الرابع	٣١	١٠٧	٣٦,٧٥	٢٦,٣٧٥	١١٧,٥٣٦
١٩٩٦	الأول	٢٥	١١١	٢٧,٧٥	٢٧,٢٥	٩١,٧٤٣
	الثانى	٣٠	١١٢	٢٨	٢٧,٨٧٥	١٠٧,٦٢٣
	الثالث	٢٥	١١٤	٢٨,٥	٢٨,٢٥	٨٨,٤٩٦
	الرابع	٣٢	١١٦	٢٩	٢٨,٧٥	١١١,٣٠٤
١٩٩٧	الأول	٢٧	١١٧	٢٩,٢٥	٢٩,١٢٥	٩٢,٧٠٤
	الثانى	٣٢	١١٩	٢٩,٧٥	٢٩,٥	١٠٨,٤٧٥
	الثالث	٢٦				
	الرابع	٣٤				

كما يلاحظ من العمود الأخير من الجدول السابق، فقد تم الحصول على أكثر من قيمة واحدة للنسبة المئوية للقيمة الفعلية إلى المتوسط المتحرك

المركز المقابلة لكل ربع من أرباع السنة، لذلك فلابد من حساب متوسط النسب المئوية للأرباع المتقابلة ويلزم لذلك تكوين الجدول التالى:

الربع سنه / السنه	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
١٩٩٣	-	-	٧٧,٤١٩	١٢٨,٣٤٢
١٩٩٤	٩٣,٦١٧	٩٨,٣٩٦	٨٦,٠٢٢	١١٢,٥
١٩٩٥	٩٧,٤٦٢	١٠٦,٩٣١	٨١,١٥٩	١١٧,٥٣٦
١٩٩٦	٩١,٧٤٣	١٠٧,٦٢٣	٨٨,٤٩٦	١١١,٣٠٤
١٩٩٧	٩٢,٧٠٤	١٠٨,٤٧٥	-	-
مجموع النسب المئويه للفصول المتقابلة	٣٧٥,٥٢٦	٤٢١,٤٢٥	٣٣٣,٠٩٦	٤٦٩,٦٨٢
متوسط النسب المئويه للفصول المتقابلة (الدليل الموسمى)	٩٣,٨٨٢	١٠٥,٣٥٦	٨٣,٢٧٤	١١٧,٤٢١
متوسط النسب المئويه المعدله للفصول المتقابله (الدليل الموسمى المعدل)	٩٣,٨٩٨	١٠٥,٣٧٤	٨٣,٢٨٨	١١٧,٤٤

وحيث أن مجموع قيم متوسط النسب المئويه للفصول المتقابله يجب أن يساوى ٤٠٠، ولكنه يساوى فى الواقع ٣٩٩,٩٣٣، فإذا توخينا الدقة التامه فى الحسابات فإنه ينبغى تعديل تلك المتوسطات بأن نضرب كل متوسط ×

معامل تصحيح عبارة عن $\frac{٤٠٠}{٣٩٩,٩٣٣}$ = ١,٠٠٠١٦٧٥

لكى يكون مجموع هذه المتوسطات مساويا تماماً لـ ٤٠٠، فمثلاً:

متوسط النسب المئويه المعدلة للربع الأول

= ٩٣,٨٨٢ × ١,٠٠٠١٦٧٥ = ٩٣,٨٩٨

وهكذا بالنسبه لأرباع السنه الأخرى.

وتظهر متوسط النسب المئويه المعدلة للفصول المتقابلـه فـى الصف الأخير من الجدول السابق وهى تمثل الدليل الموسمى لكل ربع سنة، فعلى سبيل المثال، فإن الدليل الموسمى للربع الثانى من العام يساوى ١٠٥,٣٧٤٪ ، فيعنى ذلك أن العوامل الموسميه السائدة خلال هذا الربع من العام تجعل الأسعار فيه أكبر من القيمة المتوسطه لها خلال العام بمقدار ٥,٣٧٤٪.

الطريقة الثالثة: طريقة نسبة القيم الفعليه إلى الإتجاه العام

تتلخص هذه الطريقة فى الخطوات الآتيه:

(١) يتم حساب معادلة الإتجاه العام للسلسلة الزمنيه بطريقة المربعات الصغرى، كما سبق أن أوضحنا، وتستخدم المعادلة فى إيجاد القيم الإتجاهيه لكل فترة موسميه (شهر أو فصل ... الخ) بالسلسلة الزمنيه.

(٢) يعبر عن القيم الفعليه للظاهرة كنسبة مئويه من القيم الإتجاهيه المقابلة لها وذلك فى حالة النموذج الضربى للسلسلة الزمنيه (أو كفروق بين القيم الفعليه والقيم الإتجاهيه المقابلـه لها فى حالة النموذج الجمعى للسلسلة الزمنيه) فيتم بذلك تخليص قيم الظاهرة من أثر الإتجاه العام.

(٣) نحسب الوسط الحسابى (أو الوسيط فى حالة وجود قيم شاذه للظاهرة) للنسب المئويه المستخرجه فى الخطوة (٢) للفترات الموسميه المتقابله فى السنوات المختلفه للسلسله الزمنيه (أى لكل شهر أو لكل فصل ....) حيث

يتم تخليص قيم الظاهرة من أثر التغيرات الدوريه والعرضيه، وبذلك نحصل على الدليل الموسمى المطلوب لكل فترة موسميه.

ولابد من التأكد من أن مجموع المتوسطات الحسابيه للنسب المئويه لكل الفترات الموسميه يجب أن يكون مساويا لـ ١٠٠م، فإذا لم يكن المجموع كذلك فيلزم تعديل الأدلة الموسميه بالضرب فى معامل تصحيح معين بنفس الطريقة التى أوردناها سابقاً.

مثال (١٤)

إستخدم البيانات الواردة فى مثال (١٢)- والخاصة بأسعار أحد الحاصلات الزراعية فى كل ربع سنة فى الفترة من سنة ١٩٩٣ حتى سنة ١٩٩٧- فى إيجاد:

١- الدليل الموسمى للأسعار لكل ربع سنة بإستخدام طريقة نسبة الفعلى إلى الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى بفرض أن معادلته خطية.

٢- التنبؤ بسعر السلعة فى الفصل الرابع من عام ١٩٩٩ مع أخذ أثر التغيرات الموسمية لهذا الربع من العام فى الإعتبار.

الحل

١- لإيجاد معادلة خط الإتجاه العام بطريقة المربعات الصغرى، يلزم تكوين الجدول التالى:

السنة (١)	الربع سنة (٢)	القيم الفعلية (ص) (٣)	س المعدلة (٤)	س ص (٥)	س٢ (٦)	القيم الإتجاهية ص̂ = جـ (٧)	القيم الفعلية كنسبة من القيم الإتجاهية = ص/جـ × ١٠٠ (٨)
١٩٩٣	الأول	٢٠	-١٩	-٣٨٠	٣٦١	٢١,٠٩٣	٩٤,٨١٨
	الثانى	٢٤	-١٧	-٤٠٨	٢٨٩	٢١,٥٩٩	١١١,١١٦
	الثالث	١٨	-١٥	-٢٧٠	٢٢٥	٢٢,١٠٥	٨١,٤٢٩
	الرابع	٣٠	-١٣	-٣٩٠	١٦٩	٢٢,٦١١	١٣٢,٦٧٩
١٩٩٤	الأول	٢٢	-١١	-٢٤٢	١٢١	٢٣,١١٧	٩٥,١٦٨
	الثانى	٢٣	-٩	-٢٠٧	٨١	٢٣,٦٢٣	٩٧,٣٦٣
	الثالث	٢٠	-٧	-١٤٠	٤٩	٢٤,١٢٩	٨٢,٨٨٨
	الرابع	٢٧	-٥	-١٣٥	٢٥	٢٤,٦٣٥	١٠٩,٦٠٠
١٩٩٥	الأول	٢٤	-٣	-٧٢	٩	٢٥,١٤١	٩٥,٤٦٢
	الثانى	٢٧	-١	-٢٧	١	٢٥,٦٤٧	١٠٥,٢٧٥
	الثالث	٢١	١	٢١	١	٢٦,١٥٣	٨٠,٢٩٧
	الرابع	٣١	٣	٩٣	٩	٢٦,٦٥٩	١١٦,٢٨٣
١٩٩٦	الأول	٢٥	٥	١٢٥	٢٥	٢٧,١٦٥	٩٢,٠٣٠
	الثانى	٣٠	٧	٢١٠	٤٩	٢٧,٦٧١	١٠٨,٤١٧
	الثالث	٢٥	٩	٢٢٥	٨١	٢٨,١٧٧	٨٨,٧٢٥
	الرابع	٣٢	١١	٣٥٢	١٢١	٢٨,٦٨٣	١١١,٥٦٤
١٩٩٧	الأول	٢٧	١٣	٣٥١	١٦٩	٢٩,١٨٩	٩٢,٥٠١
	الثانى	٣٢	١٥	٤٨٠	٢٢٥	٢٩,٦٩٥	١٠٧,٧٦٢
	الثالث	٢٦	١٧	٤٤٢	٢٨٩	٣٠,٢٠١	٨٦,٠٩٠
	الرابع	٣٤	١٩	٦٤٦	٣٦١	٣٠,٧٠٧	١١٠,٧٢٤
المجموع		٥١٨	صفر	٦٧٤	٢٦٦٠		

معادلة خط الإتجاه العام المقدرة للأسعار هى: $\hat{\text{ص}}_{\text{ر}} = \text{أ}_{.} + \text{أ}_{١}\,\text{س}_{\text{ر}}$

حيث:

$$\text{أ}_{١} = \frac{\text{مجـ } \text{س}_{\text{ر}}\text{ص}_{\text{ر}}}{\text{مجـ } \text{س}_{\text{ر}}^{٢}} = \frac{٦٧٤}{٢٦٦٠} = ٠,٢٥٣$$

$$\text{أ}_{.} = \frac{\text{مجـ } \text{ص}_{\text{ر}}}{\text{ن}} = \frac{٥١٨}{٢٠} = ٢٥,٩$$

إذن:

معادلة خط الإتجاه العام تكون على الصورة:

$$\hat{\text{ص}}_{\text{ر}} = ٢٥,٩ + ٠,٢٥٣\ \text{س}_{\text{ر}}$$

(على أساس أن نقطة الأصل هى النقطة الزمنية المتوسطة بين الربعين الثانى والثالث من سنة ١٩٩٥، وحدة قياس الزمن (س) ٨/١ سنة، وحدة قياس الظاهرة (ص) بالجنيه).

وتستخدم هذه المعادلة فى إيجاد القيم الإتجاهية للأسعار فى كل ربع سنة من سنوات السلسلة كما هو موضح فى العمود (٧) من الجدول السابق. وبقسمة القيم الفعلية للأسعار على القيم الإتجاهية لها مع الضرب × ١٠٠ نحصل على الأسعار متضمنة أثر التغيرات الموسمية والدورية والعرضية كما يظهر فى العمود (٨) من الجدول السابق.

وحيث أن عمود (٨) يشتمل على أكثر من قيمة للنسب المئوية للقيم الفعلية إلى القيم الإتجاهية لكل ربع سنة، فإيجاد الدليل الموسمى لكل ربع سنة يتطلب التخلص من التغيرات الدورية والعرضية وذلك بحساب الوسط

الحسابى للنسب المئوية لأرباع السنة المتقابلة فى سنوات السلسلة كمـا يتضـح من الجدول التالى:

الربع سنة / السنة	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
١٩٩٣	٩٤,٨١٨	١١١,١١٦	٨١,٤٢٩	١٣٢,٦٧٩
١٩٩٤	٩٥,١٦٨	٩٧,٣٦٣	٨٢,٨٨٨	١٠٩,٦٠٠
١٩٩٥	٩٥,٤٦٢	١٠٥,٢٧٥	٨٠,٢٩٧	١١٦,٢٨٣
١٩٩٦	٩٢,٠١٠	١٠٨,٤١٧	٨٨,٧٢٥	١١١,٥٦٤
١٩٩٧	٩٢,٥٠١	١٠٧,٧٦٢	٨٦,٠٩٠	١١٠,٧٢٤
مجموع النسب المئوية للأرباع سنة المتقابلة	٤٦٩,٩٧٩	٥٢٩,٩٣٣	٤١٩,٤٢٩	٥٨٠,٨٥
متوسط النسب المئوية للأرباع سنة المتقابلة	٩٣,٩٩٦	١٠٥,٩٨٧	٨٣,٨٨٦	١١٦,١٧

وحيث أن مجموع متوسط النسب المئويـة للأربـاع سـنة المتقابلـة فـى الصف الأخير من الجدول = ٤٠٠,٠٣٩، فى حين أن هذا المجموع يجب أن يساوى ٤٠٠. لذلك فإن الأمر يقتضى إجراء بعض التعديلات لمتوسط النسب المئوية على النحو التالى:

$$\text{معامل التصحيح} = \frac{٤٠٠}{٤٠٠,٠٣٩} = ٠,٩٩٩٩$$

إذن:

الدليل الموسمى للربع الأول (أى متوسط النسب المئوية المعدلة للربع الأول).

= ٩٣,٩٩٦ × ٠,٩٩٩٩ = ٩٣,٩٨٧

الدليل الموسمى للربع الثانى = ١٠٥,٩٨٧ × ٠,٩٩٩٩ = ١٠٥,٩٧٦

الدليل الموسمى للربع الثالث = ٨٣,٨٨٦ × ٠,٩٩٩٩ = ٨٣,٨٧٨

الدليل الموسمى للربع الرابع = ١١٦,١٧ × ٠,٩٩٩٩ = ١١٦,١٥٨

٢- للتنبؤ بسعر السلعة فى الربع الرابع من عام ١٩٩٩، أى بعد ٨ أرباع سنة من إنتهاء السلسلة الزمنية المستخدمة، نحسب القيمة الإتجاهية للسعر فى الربع سنة المطلوب وذلك بالتعويض عن س= ١٩ + ٨ (٢) = ٣٥ فى معادلة الاتجاه العام المتحصل عليها فينتج أن:

السعر فى الربع الرابع من عام ١٩٩٩

= ٢٥,٩ + ٠,٢٥٣(٣٥) = ٣٤,٧٥٥.

ويكون ذلك التنبؤ صحيحاً إذا لم تؤخذ التغيرات الموسمية فى الإعتبار، وحيث أن الدليل الموسمى للربع الرابع = ١١٦,١٥٨، فيعنى ذلك أن العوامل الموسمية السائدة خلال هذا الربع من العام تجعل السعر أقل من القيمة المتوسطة له خلال العام بمقدار ١٦,١٥٨٪، ومن ثم فإن:

السعر فى الربع الرابع من عام ١٩٩٩ مع الأخذ فى الإعتبار تأثير التغيرات الموسمية = ٣٤,٧٥٥ × ١,١٦١٧ (أى الدليل الموسمى/١٠٠) = ٤٠,٣٧٥.

(٥-٢) تخليص السلسلة الزمنية من أثر التغيرات الموسمية.

فى كثير من الأحيان يكون من المرغوب تخليص الظاهرة محل الدراسة من أثر التغيرات الموسمية وذلك لمعرفة ما إذا كانت التغيرات فى الظاهرة ناتجة عن الآثار الموسمية فقط أم أنها تغيرات حقيقية أدت إليها أسباب أخرى ذات أهمية خاصة فى هذا الشأن، وقد يكون الهدف من إزالة أثر الموسم هو الكشف عن التغيرات الأخرى التى تؤثر على الظاهرة من إتجاه عام (إذا لم يكن قد سبق تخليص الظاهرة من الإتجاه العام) والتغيرات الدورية والعرضية.

ويتم تخليص البيانات من أثر التغيرات الموسمية وذلك بقسمة القيم الفعلية للظاهرة فى الفترات الموسمية على الدليل الموسمى المناظر لكل فترة وذلك فى حالة النموذج الضربى للسلسلة الزمنية أو بطرح قيمة الدليل الموسمى لكل فترة موسمية من القيمة الفعلية للفترات الموسمية المناظرة وذلك فى حالة النموذج الجمعى للسلسلة الزمنية.

وفى كلتا الحالتين نحصل على ما يسمى بالبيانات اللاموسمية للسلسلة الزمنية والتى تعبر عن بيانات الظاهرة بعد تخليصها من أثر الموسم وتتضمن فقط التغيرات الدورية والعرضية والإتجاه العام (إذا لم يكن قد سبق تخليصها من أثر الإتجاه العام).

مثال (١٥)

إستخدم البيانات الواردة فى مثال (١٤) فى تخليص سعر السلعة فى عامى ١٩٩٦، ١٩٩٧ من أثر الموسم (بفرض أن السلسلة الزمنية تتبع النموذج الضربى)

الحل

فى المثال (١٤) تم حساب الدليل الموسمى لكل ربع سنة كما هو موضح، ويتم التخلص من أثر الموسم بقسمة القيمة الفعلية للأسعار فى كل ربع من أرباع السنة فى عامى ١٩٩٦، ١٩٩٧ على الدليل الموسمى المناظر لكل ربع سنة مع الضرب × ١٠٠ كما يتضح فى الجدول التالى:

السنة	الربع سنة	القيم الفعلية (ص)	الدليل الموسمى (م)	القيم اللاموسمية $\frac{ص}{م} \times ١٠٠$
١٩٩٦	الأول	٢٥	٩٣,٩٨٧	٢٦,٥٩٩
	الثانى	٣٠	١٠٥,٩٧٦	٢٨,٣٠٨
	الثالث	٢٥	٨٣,٨٧٨	٢٩,٨٠٥
	الرابع	٣٢	١١٦,١٥٨	٢٧,٥٤٩
١٩٩٧	الأول	٢٧	٩٣,٩٨٧	٢٨,٧٢٧
	الثانى	٣٢	١٠٥,٩٧٦	٣٠,١٩٥
	الثالث	٢٦	٨٣,٨٧٨	٣٠,٩٩٧
	الرابع	٣٤	١١٦,١٥٨	٢٩,٢٧٠

٦ التغيرات الدورية

رأينا فى معرض حديثنا عن مكونات السلسلة الزمنية أن الظواهر تتعرض لتغيرات دورية تظهر فى شكل دورات شبه منتظمة بحيث تكون مدة الدورة أكبر بكثير من السنة الواحدة، وهى تشبه التغيرات الموسمية فى أنها تتكرر بصورة شبه منتظمة وتستعيد سيرتها على مدار تلك الآجال الطويلة. إلا أن التغيرات الدورية تختلف عن التغيرات الموسمية فيما يتعلق بعملية

التنبؤ بكل منهما، فالتغيرات الموسمية تتميز بصفة الإنتظام فى حدوثها من فترة لأخرى لذلك يمكن التنبؤ بما ستكون عليه فى المستقبل، فإذا كان الدليل الموسمى للربع الأول من العام هو ١١٥,٢٪ فإننا نتوقع أن يظل الدليل الموسمى هكذا فى الربع الأول من الأعوام القادمة مالم تستجد تغيرات موسمية جديدة.

أما التغيرات الدورية فإنها تختلف عن بعضها البعض فى الطول أو الحدة أو التباعد، ولهذا يصعب التنبؤ بما ستكون عليه فى المستقبل، وكل ما يمكن عمله تجاه التغيرات الدورية هو قياسها للتعرف على آثارها على الظاهرة محل الدراسة.

ويتم قياس التغيرات الدورية لبيانات السلسلة الزمنية وفقاً للخطوات التالية:

(١) بفرض أن السلسلة الزمنية للظاهرة تتبع فى تكوينها النموذج الضربى، أى أن:

قيمة الظاهرة الأصلية = ص = جـ × م × د × ع (١)

(٢) يتم إيجاد القيم الإتجاهية للظاهرة (أى صَ = جـ) سواء بإستخدام المتوسطات المتحركة أو بإيجاد معادلة الإتجاه العام -بأى من الطرق السابق عرضها- وإستخدامها فى حساب القيم الإتجاهية فى فترات السلسلة الزمنية.

(٣) قسمة القيم الفعلية للظاهرة على القيم الإتجاهية المناظرة لها فنحصل على البيانات متضمنة أثر التغيرات الموسمية والدورية والعرضية.

ومن ثم فإن:

$$\text{قيمة الظاهرة بعد تخليصها من أثر الإتجاه العام} = \frac{\text{ص}}{\text{جـ}}$$

$$= \text{م} \times \text{د} \times \text{ع} \qquad (٢)$$

(٤) يحسب الدليل الموسمى ($م_ر$) لكل فترة موسمية بأى طريقة من طرق الحساب السابقة، وذلك فى حالة ما إذا كانت فترات السلسلة الزمنية معبراً عنها بفترات أقل من العام كأن تكون بالأيام أو بالشهور أو بالربع سنة وهكذا. ويتم تخليص بيانات السلسلة الزمنية من أثر التغيرات الموسمية وذلك بقسمة بيانات الظاهرة فى الفترات الموسمية والمتحصل عليها من المعادلة (٢) على الدليل الموسمى المناظر لكل فترة.

قيمة الظاهرة بعد تخليصها من أثر الإتجاه العام والتغيرات الموسمية

$$= \frac{\text{ص}}{\text{جـ} \times \text{م}} = \text{د} \times \text{ع} \qquad (٣)$$

ملحوظة: إذا كانت بيانات السلسلة الزمنية معطاه على أساس سنوى فإن الخطوة (٣) لا داعى لها أصلاً لأن التغيرات الموسمية تلغى بعضها البعض على مدى العام الكامل ولن تظهر بداية ضمن مكونات السلسلة الزمنية، بمعنى أن:

قيمة الظاهرة الأصلية = ص = جـ × د × ع

وبعد تطبيق الخطوة (٢) والتى يتم فيها تخليص الظاهرة من أثر الإتجاه العام ينتج ان:

قيمة الظاهرة بعد تخليصها من أثر الإتجاه العام = $\frac{ص}{جـ}$ = د × ع

(٥) يتم حساب متوسط متحرك مرجح بطول مناسب لقيم الظاهرة المتحصل عليها من المعادلة (٣) وذلك لتخليص الظاهرة من التغيرات العرضية المتبقية ونحصل على ما يسمى بالمناسيب الدورية والتى تعد مقياساً للتغير الدورى (د).

ولإيجاد المتوسطات المتحركة المرجحة، يتم أولاً إيجاد المجاميع المتحركة المرجحة بأوزان ترجيح عبارة عن مفكوك ذات الحدين بأس صحيح موجب مقداره (ن-١)، حيث (ن) تمثل طول الدورة المستخدمة فى إيجاد المجاميع المتحركة، ثم تقسم المجاميع المتحركة المرجحة على مجموع أوزان الترجيح المستخدمة فينتج المتوسطات المتحركة المرجحة. ولتوضيح ذلك دعنا نأخذ -على سبيل المثال- الحالتين التاليتين:

(أ) إذا كان طول الدورة المستخدمة لإيجاد المجموع (ومن ثم المتوسط) المتحرك يساوى ٣ فترات زمنية، أى أن ن = ٣ :

فى هذه الحالة فإن معاملات مفكوك ذات الحدين والمرفوع لأس ٢ تكون هى $ق^{٢}_{٠}$ ، $ق^{٢}_{١}$ ، $ق^{٢}_{٢}$ والتى تساوى ١، ٢، ١ على الترتيب سوف تستخدم كأوزان للترجيح، حيث تضرب القيمة الأولى من الظاهرة فى ١، والقيمة الثانية فى ٢، والقيمة الثالثة فى ١ ويقسم هذا المجموع المرجح على ٤ (وهى عبارة عن ١ + ٢ +١) فينتج المتوسط المتحرك المرجح والذى يوضع أمام القيمة الوسطى كما هو الحال عند إيجاد المتوسطات المتحركة،

وتكرر عملية الترجيح بالنسبة لكل الدورات المتحركة حتى نصل إلى نهاية السلسلة الزمنية.

(ب) إذا كان طول الدورة المستخدمة يساوى ٤ فترات زمنية، أى ن = ٤:

فى هذه الحالة فإن معاملات مفكوك ذات الحدين المرفوع لأس ٣ تكون هى $ق^{٣}_{٠}$ ، $ق^{٣}_{١}$ ، $ق^{٣}_{٢}$ ، $ق^{٣}_{٣}$ والتى تساوى ١، ٣، ٣ ، ١ على الترتيب حيث يتم ضرب القيمة الأولى من الظاهرة فى ١ والقيمة الثانية فى ٣ والقيمة الثالثة فى ٣ والقيمة الرابعة فى ١ ويقسم المجموع المتحرك المرجح على ٨ (وهى عبارة عن ١+ ٣+ ٣+ ١) لينتج المتوسط المتحرك المرجح وهكذا.

وتهدف عملية الترجيح إلى إعطاء وزن أكبر للقيم الوسطى لإحكام عملية التمهيد.

مثال (١٦)

الجدول التالى يبين قيمة الإيرادات الشهرية (بالألف جنيه) لأحد المحال التجارية خلال الفترة من شهر يناير ١٩٩٦ حتى شهر يوليو ١٩٩٧.

السنة	١٩٩٦											
الشهر	يناير	فبراير	مارس	إبريل	مايو	يونيه	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
المبيعات	١٦	١٨	١٥	١٢	١١	١٠	٩	١٠	٩	٨	١٠	٧

السنة	١٩٩٧						
الشهر	يناير	فبراير	مارس	إبريل	مايو	يونيه	يوليو
المبيعات	٦	٨	١١	١٤	١٧	١٦	١١

وبفرض أن هذه السلسلة الزمنية للإيرادات تتبع النموذج الضربى،

فالمطلوب:

١- إيجاد معادلة الإتجاه العام للإيرادات الشهرية بإستخدام طريقة المربعات الصغرى بفرض أنها خطية.

٢- حساب الدليل الموسمي لكل شهر.

٣- حساب التغيرات الدورية للسلسلة الزمنية بتكوين متوسطات متحركة مرجحة لفترة طولها ٣ شهور.

الحل

١- معادلة خط الإتجاه العام تأخذ الصورة:

$$ص_ر = \hat{أ}_. + \hat{أ}_١ س_ر$$

للحصول على التقديرين $\hat{أ}_.$ ، $\hat{أ}_١$ يلزم تكوين الجدول التالى، حيث :

$$\hat{أ}_١ = \frac{مجـ س_ر ص_ر}{مجـ س_ر^٢} = \frac{-٥٧}{٥٧٠} = -٠,١$$

$$\hat{أ}_. = \frac{مجـ ص_ر}{ن} = \frac{٢٢٨}{١٩} = ١٢$$

معادلة خط الإتجاه العام المقدرة للإيرادات هى:

$$ص_ر = ١٢ - ٠,١ س_ر$$

(على أساس أن شهر أكتوبر من عام ١٩٩٦ يمثل نقطة الأصل، وحدة قياس الزمن (س) شهر واحد، وحدة قياس الإيرادات (ص) بالألف جنيه).

السنة (١)	الشهر (٢)	المبيعات الفعلية (ص) (٣)	س المعدلة (٤)	س ص (٥)	س٢ (٦)	القيم الإتجاهية ص̂ = جـ (٧)	القيم الفعلية كنسبة من القيم الإتجاهية = ص/جـ × ١٠٠ (٨)
١٩٩٦	يناير	١٦	٩-	١٤٤-	٨١	١٢,٩	١٢٤,٠٣١
	فبراير	١٨	٨-	١٤٤-	٦٤	١٢,٨	١٤٠,٦٢٥
	مارس	١٥	٧-	١٠٥-	٤٩	١٢,٧	١١٨,١١٠
	إبريل	١٢	٦-	٧٢-	٣٦	١٢,٦	٩٥,٢٣٨
	مايو	١١	٥-	٥٥-	٢٥	١٢,٥	٨٨
	يونية	١٠	٤-	٤٠-	١٦	١٢,٤	٨٠,٦٤٥
	يوليو	٩	٣-	٢٧-	٩	١٢,٣	٧٣,١٧١
	أغسطس	١٠	٢-	٢٠-	٤	١٢,٢	٨١,٩٦٧
	سبتمبر	٩	١-	٩-	١	١٢,١	٧٤,٣٨
	أكتوبر	٨	صفر	صفر	صفر	١٢,٠	٦٦,٦٦٧
	نوفمبر	١٠	١	١٠	١	١١,٩	٨٤,٠٣٤
	ديسمبر	٧	٢	١٤	٤	١١,٨	٥٩,٣٢٢
١٩٩٧	يناير	٦	٣	١٨	٩	١١,٧	٥١,٢٨٢
	فبراير	٨	٤	٣٢	١٦	١١,٦	٦٨,٩٦٥
	مارس	١١	٥	٥٥	٢٥	١١,٥	٩٥,٦٥٢
	إبريل	١٤	٦	٨٤	٣٦	١١,٤	١٢٢,٨٠٧
	مايو	١٧	٧	١١٩	٤٩	١١,٣	١٥٠,٤٤٢
	يونيه	١٦	٨	١٢٨	٦٤	١١,٢	١٤٢,٨٥٧
	يوليو	١١	٩	٩٩	٨١	١١,١	٩٩,٠٩٩
المجموع		٢٢٨	صفر	٥٧-	٥٧٠		

٢- تم إستخدام معادلة الإتجاه العام فى إيجاد القيم الإتجاهية فى كل شهر من شهور السلسلة كما هو موضح بالعمود (٧) من الجدول

السابق، وبقسمة القيم الفعلية للإيرادات على القيم الإتجاهية لها مع الضرب × ١٠٠ نحصل على الإيرادات متضمنة أثر التغيرات الموسمية والدورية والعرضية كما هو مبين بالعمود (٨) من الجدول السابق.

وحيث أن عمود (٨) المذكور يشتمل على أكثر من قيمة للنسب المئوية للقيم الفعلية إلى القيم الإتجاهية لبعض الشهور، فيتم إيجاد الدليل الموسمى لكل شهر بحساب الوسط الحسابى للنسب المئوية للشهور المتقابلة فى السلسلة الزمنية كما يتضح فى الجدول التالى:

الشهر	١٩٩٦	١٩٩٧	مجموع النسب المئوية للشهور المتقابله	متوسط النسب المئوية للشهور المتقابله	الدليل الموسمى (م)
يناير	١٢٤,٠٣١	٥١,٢٨٢	١٧٥,٣١٣	٨٧,٦٥٧	٩٦,٣٤١
فبراير	١٤٠,٦٢٥	٦٨,٩٦٥	٢٠٩,٥٩	١٠٤,٧٩٥	١١٥,١٧٧
مارس	١١٨,١١	٩٥,٦٥٢	٢١٣,٧٦٢	١٠٦,٨٨١	١١٧,٤٧
أبريل	٩٥,٢٣٨	١١٢,٨٠٧	٢١٨,٠٤٥	١٠٩,٠٢٣	١١٩,٨٢٤
مايو	٨٨	١٥٠,٤٤٢	٢٣٨,٤٤٢	١١٩,٢٢١	١٣١,٠٣٢
يونية	٨٠,٦٤٥	١٤٢,٨٥٧	٢٢٣,٥٠٢	١١١,٧٥١	١٢٢,٨٢٢
يوليو	٧٣,١٧١	٩٩,٠٩٩	١٧٢,٢٧	٨٦,١٣٥	٩٤,٦٦٨
أغسطس	٨١,٩٦٧		٨١,٩٦٧	٨١,٩٦٧	٩٠,٠٨٧
سبتمبر	٧٤,٣٨		٧٤,٣٨	٧٤,٣٨	٨١,٧٤٩
أكتوبر	٦٦,٦٦٧		٦٦,٦٦٧	٦٦,٦٦٧	٧٣,٢٧٢
نوفمبر	٨٤,٠٣٤		٨٤,٠٣٤	٨٤,٠٣٤	٩٢,٣٥٩
ديسمبر	٥٩,٣٢٢		٥٩,٣٢٢	٥٩,٣٢٢	٦٥,١٩٩
المجموع				١٠٩١,٨٣٣	١٢٠٠

وحيث أن مجموع متوسط النسب المئوية للشهور المتقابلة = ١٠٩١,٨٣٣، فى حين أن هذا المجموع يجب أن يساوى ١٠٠×١٢ = ١٢٠٠ حتى تعبر هذه المتوسطات عن الأدلة الموسمية، هذه الفروق فى النتائج راجعة إلى أخطاء التقريب، ولهذا يلزم إجراء التعديل التالى:

$$\text{معامل التصحيح} = \frac{١٢٠٠}{١٠٩١,٨٣٣} \times ١٠٠ = ١,٠٩٩٠٧$$

ويتم ضرب كل متوسط من متوسطات النسب المئويه للشهور المتقابله فى القيمة ١,٠٩٩٠٧ فينتج الدليل الموسمى لكل شهر كما يتضح فى العمود الأخير من الجدول السابق.

٣- لحساب التغيرات الدوريه (د) للسلسله الزمنيه، سوف يتم إعادة كتابة القيم الفعليه للمبيعات (ص) والقيم الإتجاهيه لها (ص̂) والأدله الموسميه (م). وتحسب التغيرات الدوريه لشهور السلسله الزمنيه وفقا للخطوات الموضحه بالجدول التالى، حيث:

تم حساب المجاميع (ومن ثم المتوسطات) المتحركه المرجحه لفترة طولها ٣ شهور - كما هو موضح فى العمودين (٧)، (٨) على الترتيب بالجدول- على النحو التالى:

المجموع المتحرك المرجح لشهر فبراير (١٩٩٦)

= ١,٢٨٧ + ٢ (١,٢٢١) +١,٠٠٥ = ٤,٧٣٤

المتوسط المتحرك المرجح لشهر فبراير (١٩٩٦)

= ٤,٧٣٤ ÷ ٤ = ١,١٨٣٥

السنة (١)	الشهر (٢)	القيم الفعلية (ص)= ش×م×د×ع (٣)	القيم الإتجاهية (ش) (٤)	الدليل الموسمى (م) (٥)	التغيرات الدورية والعرضية د×ع = ص / ش×م (٦)	المجموع المتحرك المرجح لفترة ٣ شهور (٧)	المتوسط المتحرك المرجح = التغيرات الدورية (د) (٨)
١٩٩٦	يناير	١٦	١٢,٩	٩٦,٣٤١	١,٢٨٧		
	فبراير	١٨	١٢,٨	١١٥,١٧٧	١,٢٢١	٤,٧٣٤	١,١٨٤
	مارس	١٥	١٢,٧	١١٧,٤٧	١,٠٠٥	٤,٢٦	١,٠٠٧
	أبريل	١٢	١٢,٦	١١٩,٨٢٤	٠,٧٩٥	٣,٢٦٧	٠,٨١٧
	مايو	١١	١٢,٥	١٣١,٠٣٢	٠,٦٧٢	٢,٧٩٦	٠,٦٩٩
	يونيه	١٠	١٢,٤	١٢٢,٨٢٢	٠,٦٥٧	٢,٧٥٩	٠,٦٩٠
	يوليو	٩	١٢,٣	٩٤,٦٦٨	٠,٧٧٣	٣,١١٣	٠,٧٧٨
	أغسطس	١٠	١٢,٢	٩٠,٠٨٧	٠,٩١٠	٣,٥٠٣	٠,٨٧٦
	سبتمبر	٩	١٢,١	٨١,٧٤٩	٠,٩١٠	٣,٦٤	٠,٩١
	أكتوبر	٨	١٢	٧٣,٢٧٢	٠,٩١٠	٣,٦٤	٠,٩١
	نوفمبر	١٠	١١,٩	٩٢,٣٥٩	٠,٩١٠	٣,٦٤	٠,٩١
	ديسمبر	٧	١١,٨	٦٥,١٩٩	٠,٩١٠	٣,٢٦٢	٠,٨١٦
١٩٩٧	يناير	٦	١١,٧	٩٦,٣٤١	٠,٥٣٢	٢,٥٧٣	٠,٦٤٣
	فبراير	٨	١١,٦	١١٥,١٧٧	٠,٥٩٩	٢,٥٤٤	٠,٦٣٦
	مارس	١١	١١,٥	١١٧,٤٧	٠,٨١٤	٣,٢٥٢	٠,٨١٣
	أبريل	١٤	١١,٤	١١٩,٨٢٤	١,٠٢٥	٤,٠١٢	١,٠٠٣
	مايو	١٧	١١,٣	١٣١,٠٣٢	١,١٤٨	٤,٤٨٤	١,١٢١
	يونيه	١٦	١١,٢	١٢٢,٨٢٢	١,١٦٣	٤,٥٢١	١,١٣٠
	يوليو	١١	١١,١	٩٤,٦٦٨	١,٠٤٧		

بالمثل:

المجموع المتحرك المرجح لشهر مارس (١٩٩٦)

= ١,٢٢١ + ٢ (١,٠٠٥) + ٠,٧٩٥ = ٤,٠٢٦

المتوسط المتحرك المرجح لشهر مارس (١٩٩٦)

= ٤,٠٢٦ ÷ ٤ = ١,٠٠٧

وهكذا حتى نصل إلى نهاية السلسلة الزمنيه.

وتهدف هذه الخطوه إلى تخليص بيانات السلسلة الزمنيه من التغيرات العرضيه ومن ثم تأتى المتوسطات المتحركه المرجحه لتعبر عن المناسيب الدوريه (د) المطلوبه.

(٧) التغيرات العرضيه أو العشوائيه

عند الحديث عن مكونات السلسله الزمنيه فى بداية هذا الباب ذكرنا أن التغيرات العرضيه تحدث للظاهرة نتيجة عوامل عارضه تعتمد على الصدفه البحته مما يجعل من الصعب التنبؤ بوقوعها أو بمدى تأثيرها على الظاهرة فى المستقبل، إلا أنه يمكن قياس التغيرات العرضيه لبيانات السلسله الزمنيه وعزلها عن بقية التغيرات الأخرى من اتجاه عام وتغيرات دوريه وتغيرات موسميه. ولعل هذا يفيد فى تحديد درجة الدقة للقيم المتنبأ بها للظاهرة، فإذا تبين- مثلا - أن التغيرات العرضيه للظاهرة صغيرة جداً فإن ذلك يعد مؤشراً جيداً إلى أن القيم الفعليه للظاهرة فى الفترات المستقبليه لن تختلف كثيراً عن القيم المتنبأ بها.

واستكمالاً للتحليل السابق، فإن قياس أثر التغيرات العرضيه (ع) وعزلها يعد عملية بسيطه، فإذا كانت السلسله الزمنيه تتبع النموذج الضربى فى تكوينها، بمعنى أن:

ص = جـ × م× د × ع

فبعد قياس أثر الإتجاه العام (جـ) والتغيرات الموسميه (م) والمناسيب الدوريه (د) فإنه يمكن ببساطه قياس التغيرات العرضيه (ع) وذلك بقسمة القيم المشاهدة (ص) على حاصل الضرب جـ × م× د، أى أن:

$$\text{التغيرات العرضيه (ع)} = \frac{\text{ص}}{\text{جـ} \times \text{م} \times \text{د}}$$

بالمثل، إذا كانت السلسله الزمنيه تتبع فى تكوينها النموذج الجمعى، أى أن:

ص = جـ + م + د + ع

فإن:

التغيرات العرضيه (ع) = ص - (جـ + م + د)

ويتضح من تحليل التغيرات الدوريه والعرضيه للسلسله الزمنيه أن كلاً منهما لن يفيد فى عملية التنبؤ بالقيم المستقبليه للظاهرة نظراً لصعوبة التنبؤ بما سيكون عليه أى منهما فى الفترات الزمنيه القادمه. فى حين أن قياس التغيرات الموسميه للظاهرة يفيد بالقطع فى زيادة الدقة للقيم المتنبأ بها للظاهرة وذلك بأخذ أثر الموسم للفترات القادمه فى الإعتبار.

فإذا استخدمت معادلة الإتجاه العام فى التنبؤ بالقيمة الإتجاهيه للظاهرة فى فترة زمنيه مستقبله معينه (شهر معين أو ربع سنه معين وهكذا)، وكان معروفا قيمة الدليل الموسمى للفترة المقابلة لفترة التنبؤ فإن:

التنبؤ الدقيق للظاهرة (والذى يأخذ أثر الموسم فى الإعتبار) = القيمة الإتجاهيه المتنبأ بها فى الفترة الزمنيه × $\frac{\text{الدليل الموسمى للفترة الزمنيه المقابله لفترة التنبؤ}}{100}$

وذلك بفرض أن العوامل الموسميه السائدة خلال فترة الدراسة تظل كما هى فى الفترات القادمة.

مثال (١٧)

اعتبر البيانات الوارده فى مثال (١٦) والخاصـه بـالإيرادات الشـهريه لأحد المحال التجاريه فى الفترة من يناير ١٩٩٦ حتى يوليو ١٩٩٧.

والمطلوب:

١- حساب التغيرات العرضيه لبيانات السلسله الزمنيه.

٢- التنبـؤ بـالإيرادات المتوقعـه فـى شـهر مـارس عـام ١٩٩٨ مـع أخذ أثـر العوامل الموسميه فى الإعتبار.

الحل

١- باستعراض البيانات الوارده بالمثال المذكور وما تـم عملـه حيالهـا يتضـح أنـه تـم تقديرمعادلـة خـط الإتجـاه العـام للإيـرادات ومنهـا تـم ايجـاد القيـم الإتجاهيه للإيرادات (ص) فـى شـهور السلسـله، كمـا تـم حسـاب الدليـل الموسمى (م) وكذا المناسيب الدوريه (د) لكـل شـهر مـن شـهور السلسـله كما هو موضح بالجدول الأخير فى حل المثال السابق.

وبقسمة التغيرات الدوريه والعرضيه (أى د×ع) -المبينه بالعمود (٦) مـن الجـدول السـابق الإشـارة اليـه- علـى التغـيرات الدوريـه (أى د) فقـط الموجودة بالعمود (٨) من نفس الجدول، نحصل على التغيرات العرضيه (أى ع) كما يتضح فى الجدول التالى:

السنه	الشهر	التغيرات الدوريه والعرضيه (د×ع)	التغيرات الدوريه (د)	التغيرات العرضيه (ع) = د×ع / د
١٩٩٦	يناير	١,٢٨٧		
	فبراير	١,٢٢١	١,١٨٤	١,٠٣١
	مارس	١,٠٠٥	١,٠٠٧	٠,٩٩٨
	أبريل	٠,٧٩٥	٠,٨١٧	٠,٩٧٣
	مايو	٠,٦٧٢	٠,٦٩٩	٠,٩٦١
	يونيه	٠,٦٥٧	٠,٦٩٠	٠,٩٥٢
	يوليو	٠,٧٧٣	٠,٧٧٨	٠,٩٩٤
	أغسطس	٠,٩١٠	٠,٨٧٦	١,٠٣٩
	سبتمبر	٠,٩١٠	٠,٩١	١,٠٠٠
	أكتوبر	٠,٩١٠	٠,٩١	١,٠٠٠
	نوفمبر	٠,٩١٠	٠,٩١	١,٠٠٠
	ديسمبر	٠,٩١٠	٠,٨١٦	١,١١٥
١٩٩٧	يناير	٠,٥٣٢	٠,٦٤٣	٠,٨٢٧
	فبراير	٠,٥٩٩	٠,٦٣٦	٠,٩٤٢
	مارس	٠,٨١٤	٠,٨١٣	١,٠٠١
	أبريل	١,٠٢٥	١,٠٠٣	١,٠٢٢
	مايو	١,١٤٨	١,١٢١	١,٠٢٤
	يونيه	١,١٦٣	١,١٣٠	١,٠٢٩
	يوليو	١,٠٤٧		

وباستخدام النتائج فى كل من الجدول السابق والجدول الأخير فى حل المثال (١٦) يتضح أن القيمة الفعليه للإيرادات الشهريه (ص) ستكون عبارة عن حاصل ضرب مركباتها الأربع وهى: الإتجاه العام (جـ) والتغيرات الموسميه (م) والتغيرات الدوريه (د) والتغيرات العرضيه (ع)، وأى فروق تنشأ إنما تكون نتيجة التقريب فى العمليات الحسابيه. فعل سبيل المثال، فى شهر أبريل من عام ١٩٩٦ نجد أن:

القيمة الفعليه للإيرادات (ص) = ١٢

كما أن:

حاصل الضرب جـ × م × د × ع

= ١٢,٦ × ١,١٩٨٢٤ × ٠,٨١٧ × ٠,٩٧٣ = ١٢,٠٠١ ≈ ١٢

٢- للتنبؤ بالإيرادات المتوقعه فى شهر مارس من عام ١٩٩٨ مع أخذ أثر التغيرات الموسميه فى الحسبان، يلاحظ أن معادلة الاتجاه العام المقدره للإيرادات هى:

ضَ ر = ١٢ - ٠,١ س ر

(على أساس أن شهر أكتوبر من عام ١٩٩٦ يمثل شهر الأساس، وحدة قياس الزمن (س) شهر واحد، وحدة قياس الإيرادات (ص) بالألف جنيه)

القيمة الإتجاهيه للإيرادات فى مارس عام ١٩٩٨

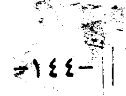
= ضَ ر = ١٢ - ٠,١(١٧) = ١٠,٣

وحيث أن الدليل الموسمى للإيرادات فى شهر مارس (بفترة الدراسة) يساوى ١١٧,٤٧٪، إذن:

الإيرادات المتوقعه فى مارس ١٩٩٨ مع أخذ التغيرات الموسميه فى الحسبان

= (١٠,٣ × ١١٧,٤٧) / ١٠٠ = ١٢,٠٩٩

وذلك بفرض أن العوامل الموسميه السائده خلال فترة الدراسه ستظل كما هى حتى فترة التنبؤ.



البـــــاب الثالث

تحليل التبايـن

Analysis of Variance

يرجع الفضل فى إظهار تحليل التباين إلى العالم الإحصائى فيشر وهـو يمثل إحدى الطرق الإحصائية التى تستخدم فى معرفة ما إذا كـانت هنـاك فروقا معنوية بين متوسطات عدة عوامل أو مجموعات كما يستخدم أيضا فى تقدير درجة معنوية الفروق بين تلك المجموعات أو العوامل.

ولقد استخدم تحليل التباين أولا فى الأبحاث الزراعية كأن يقوم البـاحث بزراعة أصناف مختلفة من القطن ثم يختبر ما إذا كانت هناك فروقا معنويـة بين متوسطات إنتاجية هذه الأصناف، أو أن يعطى الباحث نوع معيـن مـن الماشية أنواعا مختلفة من الأعلاف ثم يختبر ما إذا كانت هناك فروقا معنوية بين أوزانها لتحديد أى أنواع الأعلاف أكثر تأثيرا على زيادة وزن الماشـية ......وهكذا. إلا أن أسلوب تحليل التباين شاع استخدامه بعد ذلك وانتشر فـى جميع المجالات الصناعية والطبية والتربوية وغيرها من المجـالات التـى أصبحت تشكل مجالا خصبا للتحليل الإحصائى.

وفى حالة تحليل التباين فإننا لا نختبر معنوية الفرق بين متوسط كـل اثنين من العينات (كما هو الحال فى اختبارات الوسط الحسـابى باسـتخدام توزيع ت) ولكن يتم الاختبار باعتبار جميع العينات نابعة من مجتمع واحد ثم يحسب تقديرين مستقلين لذلك التباين يمكن اختبار تساويهما باستخدام توزيـع ف، فإذا قبل فرض التساوى تكون المتوسطات بين المجموعـات المختلفـة

متساوية أو الفروق بينهم ليست معنوية وإذا رفض فرض التساوى تكون المتوسطات من مجتمعات مختلفة ويكون الاختلاف بينهم معنويا.

ويوجد عدة حالات يمكن أن يستخدم فيها تحليل التباين منها تحليل التباين فى اتجاه واحد، تحليل التباين فى اتجاهين (تصميم التجربة العشوائية)، تحليل التباين فى ثلاثة اتجاهات (المربع اللاتينى)، وتحليل التباين فى أربعة اتجاهات (المربع اللاتينى الإغريقى). وسوف نقتصر هنا على تحليل التباين فى اتجاه واحد. ويعد هذا النوع من أبسط الصور الخاصة بتحليل التباين ويعرف أحيانا بالتصنيف الأحادى وذلك لأنه يتم تقسيم البيانات فيه إلى عدة مجموعات طبقا لصفة واحدة فقط، فإذا كانت الصفة التى نهتم بدراستها هى التعليم وكان هناك ثلاث طرق مقترحة لذلك، فيكون الهدف حينئذ هو معرفة ما إذا كانت طرق التعليم الثلاثة متشابهة فى فاعليتها أم أن إحداها أو بعضها يفوق الأخرى، حيث نقسم الطلاب إلى ثلاث مجموعات ونطبق على كل مجموعة طريقة معينه من هذه الطرق، وفى نهاية التجربة نقوم بعمل اختبار مشترك وذلك لمعرفة ما إذا كانت هناك فروقا معنوية بين متوسطات درجات الطلاب فى المجموعات الثلاثة تكون راجعة إلى اختلاف طريقة التعليم المتبعة.

ومن أمثلة تحليل التباين فى اتجاه واحد ما يلى:

- مقارنة معدل الإنتاجية فى عدة مناطق أو أحواض زراعية يزرع بكل منها نوع معين من القطن.
- مقارنة الزيادة فى الوزن لمجموعة من الأغنام أو الماشية أعطى كل منها نوع معين من الغذاء.

- مقارنة حجم الأرباح السنوية المتحققة فى مجموعة من الشركات تطبق كل منها سياسة إدارية مختلفة.

والأساس فى طريقة تحليل التباين معتمدة على طريقة قاعدة الجمع فى التشتت، فبعد تقسيم البيانات فى شكل مجموعات فإن مجموع المربعات الكلى لكل مفردات الظاهرة ينقسم إلى:

أ) مجموع المربعات بين المجموعات

ب) مجموع المربعات داخل المجموعات نفسها.

ولبيان كيفية إجراء تحليل التباين نفترض أن عدد المجموعات (العينات) هو م وأن عدد المفردات بتلك المجموعات هو $ن_١$ ، $ن_٢$،.........، $ن_م$ على الترتيب. ، وفى حالة تساوى عدد المفردات بكل مجموعة (وهو الأمر المفضل فى تحليل التباين) فإن:

$ن_١ = ن_٢ = ... = ن_م = ن$

ويكون العدد الكلى للمفردات بالتجربة فى هذه الحالة يساوى م × ن.

وسوف نتناول بالتحليل كيفية إجراء تحليل التباين فى حالة ما إذا كان عدد المفردات بالمجموعات المختلفة متساوى وإذا كان عدد المفردات بالمجموعات المختلفة غير متساوى.

(٤-١) تحليل التباين إذا كان عدد المفردات متساوى

باعتبار أن عدد المفردات بكل مجموعة متساوى فإن التحليل يتم كالآتى:-

الفرض العدمى : $H_0 : \mu_١ = \mu_٢ = ...= \mu_م$

ويعنى أنه لا توجد فروق معنوية بين متوسطات المجتمعات التى سحبت منها العينات.

الفرض البديل : $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \dots\dots\dots\dots \neq \mu_{\text{م}}$

ويعنى أنه توجد فروق معنوية بين متوسطات المجتمعات التى سحبت منـــها العينات.

فإذا اعتبرنا أن الوسط الحسابى العام هو $\bar{\bar{\text{س}}}$ حيث:

$$\bar{\bar{\text{س}}} = \frac{\text{المجموع الكلى للمفردات}}{\text{العدد الكلى للمفردات}} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{رو}}}{\text{م ن}}$$

وسوف نعبر أن $\bar{\text{س}}_{\text{ر}}$ هو الوسط الحسابى للعينة الرائية حيث:

ر = ١، ٢، ....، م فنجد أن:

$$\text{مجموع المربعات الكلى} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\bar{\text{س}}})^2$$

$$= \sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} [(\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\text{س}}_{\text{ر}}) + (\bar{\text{س}}_{\text{ر}} - \bar{\bar{\text{س}}})]^2$$

$$= \sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} [(\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\text{س}}_{\text{ر}})^2 + 2(\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\text{س}}_{\text{ر}}) \times (\bar{\text{س}}_{\text{ر}} - \bar{\bar{\text{س}}})$$
$$+ (\bar{\text{س}}_{\text{ر}} - \bar{\bar{\text{س}}})^2]$$

وحيث أن الحد الأوسط:

$$= \sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} ٢(\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\text{س}}_{\text{ر}})(\bar{\text{س}}_{\text{ر}} - \bar{\bar{\text{س}}})$$

$$= ٢ \sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} (\bar{\text{س}}_{\text{ر}} - \bar{\bar{\text{س}}}) \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\text{س}}_{\text{ر}})$$

ولكن:

$$\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\text{س}}_{\text{ر}}) = \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{رو}} - \text{ن}_{\text{ر}} \bar{\text{س}}_{\text{ر}}$$

حيث:

$$\bar{\text{س}}_{\text{ر}} = \frac{\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}_{\text{ر}}} \text{س}_{\text{رو}}}{\text{ن}_{\text{ر}}}$$

$$\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}_{\text{ر}}} \text{س}_{\text{رو}} = \text{ن}_{\text{ر}} \bar{\text{س}}_{\text{ر}}$$

$$\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}_{\text{ر}}} (\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\text{س}}_{\text{ر}}) = \text{صفر}$$

وعلى ذلك فإن الحد الأوسط = صفر

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\bar{\text{س}}})^٢ = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} (\bar{\text{س}}_{\text{ر}} - \bar{\bar{\text{س}}})^٢$$

$$+ \sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\text{س}}_{\text{ر}})^٢$$

$$= \sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \text{ن}_{\text{ر}} (\bar{\text{س}}_{\text{ر}} - \bar{\bar{\text{س}}})^٢ + \sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\text{س}}_{\text{ر}})^٢$$

أى أن:

مجموع المربعات الكلى = مجموع المربعات بين المجموعات
+ مجموع المربعات داخل المجموعات.

وعلى ذلك فإن:

- مجموع المربعات الكلى عبارة عن مجموع مربعات انحرافات جميع المفردات فى التجربة عن الوسط الحسابى العام.
- مجموع المربعات بين المجموعات عبارة عن مجموع مربعات انحرافات المتوسطات الحسابية الجزئية ($\overline{س_ر}$) لكل مجموعة من المجوعات المكونة للظاهرة عن الوسط الحسابى العام مرجحا بعدد مفردات كل مجموعة ن.
- مجموع المربعات داخل المجموعات عبارة عن مجموع مربعات انحرافات مفردات كل مجموعة عن الوسط الحسابى الخاص بهذه المجموعة.

وبمعرفة مجموع المربعات الكلى ومجموع المربعات بين المجموعات يمكننا الحصول على مجموع المربعات داخل المجموعات بطرح الثانى من الأول حيث:

مجموع المربعات داخل المجموعات = مجموع المربعات الكلى - مجموع المربعات بين المجموعات.

بالمثل يمكن تقسيم درجات الحرية للتبـــاين الكلـــى إلـــى القســـمين: بيـــن المجموعات وداخل المجموعات حيث تكون درجات الحرية:

درجات الحرية للتباين الكلى = م ن - ١

درجات الحرية بين المجموعات = م - ١

درجات الحرية داخل المجموعات = م(ن - ١)

وبقسمة مجموع المربعات بين وداخل المجموعات علـــى درجـــات الحريـــة المناظرة لكل منهما نحصل على تقديرين غير متحيزين للتباين كالآتى:

$$\text{تقدير التباين (بين المجموعات)} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \text{ن}_{\text{ر}} (\bar{\text{س}}_{\text{ر}} - \bar{\bar{\text{س}}})^2}{(\text{م} - 1)}$$

تقدير التباين (داخل المجموعات)

$$= \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\text{س}}_{\text{ر}})^2}{\text{م}(\text{ن} - 1)}$$

وحيث أن تقديرى التباين (بين العينات) و(داخل العينات) تقديريـــن لتبـــاين المجتمع تحت مجموعة من الفروض الآتية:

١) أن عدد (م) من المجموعات مأخوذة عشوائياً من (م) مجتمع

٢) أن المجتمعات (م) موزعة توزيعاً طبيعياً

٣) أن تباين المجتمعات (م) متساوى.

فتكون النسبة بين التقديرين:

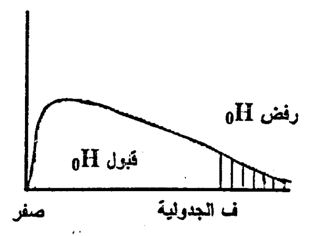
$$\text{ف} = \frac{\text{متوسط المربعات بين المجموعات}}{\text{متوسط المربعات داخل المجموعات}}$$

تتبع توزيع ف بدرجات حرية (م - ١) ، م (ن - ١)

والمتوقع أن تكون قيمة ف المحسوبة بالمعادلة السابقة قريبة جداً من الواحد الصحيح حيث أن التقديرين لمجتمع واحد بفرض صحة الفرض العدمي أي فرض تساوى متوسطات المجتمعات، أما فى حالة عدم صحة الفرض العدمى فإن قيمة ف المحسوبة تكون أكبر من الواحد الصحيح.

وعلى قدر كبر قيمة ف المحسوبة بالمقارنة بقيمة ف الجدولية عند درجات الحرية ((م - ١) ، م(ن - ١)) ولمستوى المعنوية α أى:

ف ((م - ١) ، م(ن - ١) ، α) والتى نحصل عليها من جدول توزيع ف يمكن اختبار معنوية اختلاف متوسطات المجتمعات التى سحبت منها العينات للظاهرة محل الدراسة حيث تتحدد منطقة قبول ورفض الفرض العدمى H_o بقيمة ف الجدولية كما يلى:



فإذا كانت ف المحسوبة < ف الجدولية أى تقع فى منطقة القبول نقبل الفرض العدمى H_o والذى يقضى بعدم وجود فروق معنوية بين متوسطات المجموعات وأن الفروق الموجودة بينهم ترجع فقط إلى عامل الصدفة. أما إذا كانت ف المحسوبة $\geq$ ف الجدولية أى تقع فى منطقة الرفض نرفض الفرض

العدمى H_0 ونقبل الفرض البديل H_1 وتكون هناك حينئذ فروق معنوية بين متوسطات المجموعات المختلفة.

ويكون جدول تحليل التباين على الصورة:

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	ف
بين المجموعات	م-١	مجـ ن ر (س̄ ر - س̿)٢ = X	د١ = X / (م-١)	د١ / د٢
داخل المجموعات	م(ن-١)	مجـ مجـ (س ور - س̄ ر)٢ = XX	د٢ = XX / م(ن-١)	
المجموع	م ن-١	مجـ مجـ (س ور - س̿)٢		

ويجب ملاحظة أن تحليل التباين لاختبار تساوى متوسط عينتين يعطى نفس النتيجة التى نحصل عليها باستخدام اختبار الطرفين لتوزيع ت لمتوسط نفس العينتين.

والمثال الآتى يوضح كيفية إجراء اختبار تحليل التباين.

مثال(١)

للمقارنة بين أربعة أنواع من القمح (أ ، ب ، جـ ، د) بغرض تعميم أفضلها فى الزراعة تم زراعة كل نوع فى حوض تجريبى بحيث كانت الأحواض الأربعة متماثلة فى خصوبة ونوع التربة وكمية الأسمدة المستعملة ومنسوب المياه ودرجة الحرارة وكانت إنتاجية الفدان من كل نوع كما يلى:

أ	ب	جـ	د
١	٦	٧	٢
٣	٥	٨	٦
٥	٧	٦	٤

والمطلوب إختبار معنوية الفروق بين الأنواع الأربعة من القمح بدرجة ثقة ٩٥%.

الحـل

$H_0 : \mu_١ = \mu_٢ = \mu_٣ = \mu_٤$

$H_1 : \mu_١ \neq \mu_٢ \neq \mu_٣ \neq \mu_٤$

عدد المجموعات = م = ٤

عدد مفردات المجموعة الواحدة = ٣

العدد الكلى للمفردات = ن م = ٣ × ٤ = ١٢

الوسط الحسابى للعينة الأولى= $\bar{س}_١ = \frac{مجـ س_١}{ن_١} = \frac{٩}{٣} = ٣$

الوسط الحسابى للعينة الثانية= $\bar{س}_٢ = \frac{مجـ س_٢}{ن_٢} = \frac{١٨}{٣} = ٦$

الوسط الحسابى للعينة الثالثة= $\bar{س}_٣ = \frac{مجـ س_٣}{ن_٣} = \frac{٢١}{٣} = ٧$

الوسط الحسابى للعينة الرابعة= $\bar{س}_٤ = \frac{مجـ س_٤}{ن_٤} = \frac{١٢}{٣} = ٤$

الوسط الحسابى العام = $\bar{\bar{س}} = \frac{\text{مجموع الأوساط الحسابية للمجموعات}}{\text{عدد المجموعات}}$

$= \frac{٣ + ٦ + ٧ + ٤}{٤} = ٥$

١) نحسب مجموع المربعات الكلى كما يلى:

س رو	(س رو − س̿)	^{2}(س رو − س̿)
١	−٤	١٦
٣	−٢	٤
٥	صفر	صفر
٦	١	١
٥	صفر	صفر
٧	٢	٤
٧	٢	٤
٨	٣	٩
٦	١	١
٢	−٣	٩
٦	١	١
٤	−١	١
٦٠	صفر	٥٠

مجموع المربعات الكلى = $\sum_{ر=1}^{4} \sum_{و=1}^{3}$ (س رو − س̿)^2 = ٥٠

٢) مجموع المربعات بين المجموعات = $\sum_{ر=1}^{4}$ نر (س̄ر − س̿)^2

= [٣(٣−٥)^2] + [٣(٦−٥)^2] + [٣(٧−٥)^2] + [٣(٤−٥)^2]

=٣[٤+١+٤+١] =٣٠

مجموعات المربعات بين المجموعات = ٣٠

مجموع المربعات داخل المجموعات = $\sum_{ر=1}^{4} \sum_{و=1}^{3} (س_{رو} - \bar{س}_{ر})^2$

العينة الأولى: $\bar{س}_{1} = 3$

$س_{1و}$	$(س_{1و} - \bar{س}_{1})$	$(س_{1و} - \bar{س}_{1})^2$
١	-٢	٤
٣	صفر	صفر
٥	٢	٤
المجموع	صفر	٨

العينة الثانية: $\bar{س}_{2} = 6$

$س_{2و}$	$(س_{2و} - \bar{س}_{2})$	$(س_{2و} - \bar{س}_{2})^2$
٦	صفر	صفر
٥	-١	١
٧	١	١
المجموع	صفر	٢

العينة الثالثة: $\bar{س}_{٣}$ =٧

$س_{٣و}$	$(س_{٣و} - \bar{س}_{٣})$	$(س_{٣و} - \bar{س}_{٣})^{٢}$
٧	صفر	صفر
٨	١	١
٦	١-	١
المجموع	صفر	٢

العينة الرابعة: $\bar{س}_{٤}$ =٤

$س_{٤و}$	$(س_{٤و} - \bar{س}_{٤})$	$(س_{٤و} - \bar{س}_{٤})^{٢}$
٢	٢-	٤
٦	٢	٤
٤	صفر	صفر
المجموع	صفر	٨

ومن ثم فإن:

مجموع المربعات داخل المجموعات = ٨ + ٢ + ٢ + ٨ = ٢٠

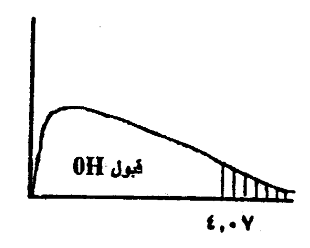
ويمكن حساب مجموع المربعات داخل المجموعات مباشرة بطـــرح مجموع المربعات بين المجموعات من مجموع المربعات الكلى كما يلى:

مجموع المربعات داخل المجموعات = ٥٠ - ٣٠ = ٢٠

جدول تحليل التباين

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموعات المربعات	متوسط المربعات	ف
بين المجموعات	٣	٣٠	١٠	٤
داخل المجموعات	٨	٢٠	٢,٥	
الكلى	١١	٥٠		

ف الجدولية = ف (٣ ، ٨ ، ٠٠٥) = ٤,٠٧



حيث أن ف المحسوبة = ٤ < ف الجدولية أى تقع فى منطقة القبول لـذا نقبل الفرض العدمى H_0 وعلى ذلك لا توجد فروق معنوية بين متوسـطات إنتاجية الفدان للأنواع الأربعة من القمح والفروق الموجودة بينهم ترجع إلـى عوامل الصدفة.

طريقة أخرى لحساب مجموع المربعات

رأينا فى الطريقة السابقة أن مجموع المربعات الكلى يتـم الحصـول عليه بإيجاد إنحرافات جميع المفردات عن الوسط الحسابى العام وتربيع هـذه الإنحرافات. كما أن مجموع المربعات بيـن المجموعـات يتطلـب إيجـاد إنحرافات المتوسطات الجزئية للعينات عن الوسط الحسابى العام ثم تربيع تلك

الإنحرافات، كذلك فإن مجموع المربعات داخل المجموعات يستلزم إيجاد انحرافات مفردات كل مجموعة عن الوسط الحسابى لتلك المجموعة ثم تربيع تلك الإنحرافات،وفى كثير من الأحيان يصعب إستخدام هذه الطريقة إذا كان الوسط الحسابى العام أو بعض أو كل من الأوساط الحسابية الجزئية للمجموعات عبارة عن قيم كسرية فإن حساب الإنحرافات عن الوسط ثم تربيع هذه الإنحرافات ستكون صعبة ومطولة خاصة إذا كان عدد المجموعات أو عدد المفردات الكلى كبيرا. لذلك يمكن اختصار العمليات الحسابية اللازمة بصورة كبيرة وذلك باستخدام مجاميع ومجاميع مربعات القيم الأصلية على النحو التالى:

مجموع المربعات الكلى = $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\bar{\text{س}}})^2$

$$= \sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{رو}})^2 - \frac{\left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{رو}}\right)^2}{\text{م} \times \text{ن}}$$

$$= \sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{رو}})^2 - \frac{(\text{س}_{..})^2}{\text{م} \times \text{ن}}$$

حيث:

$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{رو}} = \text{س}_{..}$ على سبيل الإختصار

مجموع المربعات بين المجموعات= $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{م}} \text{ن}_{\text{ر}} (\bar{\text{س}}_{\text{ر}} - \bar{\bar{\text{س}}})^2 =$

$$\left[\frac{\left(\underset{\text{و}=1}{\overset{\text{ن}_1}{\text{مجـ}}}\text{س}_{1\text{و}}\right)^2}{\text{ن}_1}+\frac{\left(\underset{\text{و}=1}{\overset{\text{ن}_2}{\text{مجـ}}}\text{س}_{2\text{و}}\right)^2}{\text{ن}_2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\underset{\text{و}=1}{\overset{\text{ن}_\text{م}}{\text{مجـ}}}\text{س}_{\text{م و}}\right)^2}{\text{ن}_\text{م}}\right]-\frac{\left(\underset{\text{ر}=1}{\overset{\text{م}}{\text{مجـ}}}\ \underset{\text{و}=1}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}}\text{س}_{\text{ر و}}\right)^2}{\text{م}\times\text{ن}}$$

$$=\underset{\text{ر}=1}{\overset{\text{م}}{\text{مجـ}}}\left[\frac{\left(\underset{\text{و}=1}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}}\text{س}_{\text{ر و}}\right)^2}{\text{ن}_\text{ر}}\right]-\frac{\left(\underset{\text{ر}=1}{\overset{\text{م}}{\text{مجـ}}}\ \underset{\text{و}=1}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}}\text{س}_{\text{ر و}}\right)^2}{\text{م}\times\text{ن}}$$

مجموع المربعات داخل المجموعات

= مجموع المربعات الكلى - مجموع المربعات بين المجموعات

$$=\underset{\text{ر}=1}{\overset{\text{م}}{\text{مجـ}}}\ \underset{\text{و}=1}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}}\left(\text{س}_{\text{ر و}}\right)^2-\left[\underset{\text{ر}=1}{\overset{\text{م}}{\text{مجـ}}}\frac{\left(\underset{\text{و}=1}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}}\text{س}_{\text{ر و}}\right)^2}{\text{ن}_\text{ر}}\right]$$

وعلى ذلك يكون المطلوب هو حساب:

$$\frac{(\underset{ر=١}{\overset{م}{\text{مجـ}}}\ \underset{و=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ س_{رو})}{ك \times ن} \quad ،\quad \underset{ر=١}{\overset{م}{\text{مجـ}}}\ \underset{و=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}}\ س^{٢}_{رو} \quad ،$$

$$،\ \underset{ر=١}{\overset{م}{\text{مجـ}}} \quad \frac{(\underset{ر}{\text{مجـ}}\ س_{رو})^{٢}}{ن_ر}$$

ويمكن حل المثال السابق وفقا لهذه الطريقة كما يلي:

المجموعة الأولى		المجموعة الثانية		المجموعة الثالثة		المجموعة الرابعة	
$س_{١و}$	$س^{٢}_{١و}$	$س_{٢و}$	$س^{٢}_{٢و}$	$س_{٣و}$	$س^{٢}_{٣و}$	$س_{٤و}$	$س^{٢}_{٤و}$
١	١	٦	٣٦	٧	٤٩	٢	٤
٣	٩	٥	٢٥	٨	٦٤	٦	٣٦
٥	٢٥	٧	٤٩	٦	٣٦	٤	١٦
٩	٣٥	١٨	١١٠	٢١	١٤٩	١٢	٥٦

$م = ٤$

$ن_١ = ن_٢ = ن_٣ = ن_٤ = ٣$

$ن\ م = ٣ \times ٤ = ١٢$

$$\underset{ر=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ \underset{و=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}}\ س_{رو} = س_{..} = ٩ + ١٨ + ٢١ + ١٢ = ٦٠$$

$$\underset{ر=١}{\overset{٤}{\text{مجـ}}}\ \underset{و=١}{\overset{٣}{\text{مجـ}}}\ س^{٢}_{رو} = ٣٥+١١٠+١٤٩+٥٦ = ٣٥٠$$

١)مجموع المربعات الكلى

$$= \sum_{ر=1}^{4}\sum_{و=1}^{3} س^2_{رو} - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{4}\sum_{و=1}^{3} س_{رو}\right)^2}{ن \times م}$$

$$= \sum_{ر=1}^{4}\sum_{و=1}^{3} س^2_{رو} - \frac{(س..)^2}{ن \times م}$$

$$= ٣٥٠ - \frac{(٦٠)^2}{١٢} = ٥٠$$

٢) مجموع المربعات بين المجموعات

$$= \sum_{ر=1}^{4} \frac{\left(\sum_{و=1}^{3} س_{رو}\right)^2}{ن} - \frac{(س..)^2}{ن \times م}$$

$$= \frac{(٩)^2 + (١٨)^2 + (٢١)^2 + (١٢)^2}{٣} - ٣٠٠ = ٣٠$$

٣) مجموع المربعات داخل المجموعات

= مجموع المربعات الكلى - مجموع المربعات بين المجموعات

= ٥٠ - ٣٠ = ٢٠

وهى نفس النتيجة السابقة.

ويتم تكوين جدول تحليل التباين واستكمال الحل كما سبق.

(٤-٢) تحليل التباين إذا كان عدد المفردات مختلف

يمكن إجراء نفس التحليل السابق فى حالة ما إذا كان عدد المفـــردات فى المجموعات المختلفة غير المتساوى كما يتضح من المثال التالى:

مثال (٢)

طبقت ثلاثة برامج مختلفة للتدريب علـــى ثــلاث مجموعــات مــن اللاعبين: الأولى تضم أربعة أفراد والثانية تضم ستة أفراد والثالثـــة تضــم خمسة أفراد وفى نهاية فترة التدريب أجرى لهم اختبار وكان عدد الأهــداف المسجلة لكل لاعب كما يلى:

البرنامج الأول	٥	٦	٧	٦		
البرنامج الثانى	٦	٢	٤	٥	٣	٤
البرنامج الثالث	٧	٦	٨	٩	٥	

اختبر ما إذا كانت هناك فروقا معنوية بين برامج التدريـــب الثــلاث بمستوى معنوية ٥%.

الحـل

م= ٣ ، ن١=٤ ، ن٢ =٦ ، ن٣ =٥

العدد الكلى للمفردات = ٤ + ٦ + ٥ = ١٥

H_0: μ١ = μ٢ = μ٣

H_1: μ١ ≠ μ٢ ≠ μ٣

المجموعة الأولى		المجموعة الثانية		المجموعة الثالثة	
س١و	س٢١و	س٢و	س٢٢و	س٣و	س٢٣و
٥	٢٥	٦	٣٦	٧	٤٩
٦	٣٦	٢	٤	٦	٣٦
٧	٤٩	٤	١٦	٨	٦٤
٦	٣٦	٥	٢٥	٩	٨١
		٣	٩	٥	٢٥
		٤	١٦		
٢٤	١٤٦	٢٤	١٠٦	٣٥	٢٥٥

مجـــ مجـــ س رو = س.. =٢٤ + ٢٤ + ٣٥ = ٨٣
ر و

مجـــ مجـــ س٢ رو = ١٤٦ + ١٠٦ + ٢٥٥ = ٥٠٧
ر و

مجموع مربعات الكلى

= مجـــ مجـــ س٢ رو − (س..)٢ / العدد الكلى للمفردات
ر و

= ٥٠٧ − (٨٣)٢ / ١٥ = ٤٧,٧٣

مجموعات المربعات بين المجموعات

$$= \underset{ر}{\overset{٣}{مجـ}} \frac{(مجـ_{و} س_{ر و})^{٢}}{ن_{ر}} - \frac{(س..)^{٢}}{العدد الكلى للمفردات}$$

$$= [\frac{(٢٤)^{٢}}{٤} + \frac{(٢٤)^{٢}}{٦} + \frac{(٣٥)^{٢}}{٥}] - \frac{(٨٣)^{٢}}{١٥}$$

= ٤٨٥ - ٤٥٩,٢٧ = ٢٥,٧٣

مجموع المربعات داخل المجموعات

= مجموعات المربعات الكلى - مجموع المربعات بين المجموعات

= ٣٧,٧٣ - ٢٥,٧٣ = ٢٢

ويأخذ جدول تحليل التباين الصورة:

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	ف
بين المجموعات داخل المجموعات	٢ ١٢	٢٥,٧٣ ٢٢	١٢,٨٦٥ ١,٨٣٣	٧,٠١٨
المجموع	١٤			

فعندما يكون عدد المفردات داخل المجموعات مختلف فإن:

درجات الحرية بين المجموعات = عدد المجموعات - ١

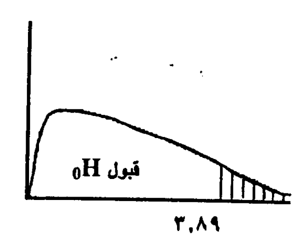
= ٣ - ١ = ٢ (فى المثال السابق)

درجات الحرية داخل المجموعات

= العدد الكلى للمفردات - عدد المجمعات

= ١٥ - ٣ = ١٢ (فى المثال)

ف الجدولية = ف (٢،١٢، ٠,٠٥) = ٣,٨٩



ف المحسوبة > ف الجدولية أى تقع فى منطقة الرفض ، فنرفض H_0 ونقبل H_1 مما يعنى وجود فروق معنوية بين برامج التدريب الثلاثة وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪.

تحليل معنوية الفروق بين متوسطات المجموعات

رأينا أنه بتحليل التباين وإجراء اختبار ف يمكن معرفة ما إذا كانت هناك فروقا معنوية بين متوسطات المجموعات المختلفة أم لا ، ففى حالة قبول الفرض العدمى فان معنى ذلك أنه لا توجد فروق معنوية بين متوسطات المجموعات المختلفة وبالتالى فان تأثير تلك المجموعات متساوى وإن وجدت بينهم فروق فتعزى إلى عوامل الصدفة وبالتالى لا يمكن تفضيل إحدى هذه المجموعات على المجموعات الأخرى. أما فى حالة قبول الفرض البديل فإن معنى ذلك أنه توجد فروق معنوية بين متوسطات المجموعات المختلفة وبالتالى فان تلك المجموعات تختلف فى تأثيرها عن بعضها البعض. وفى هذه الحالة قد يكون من المناسب تحليل تلك الفروق المعنوية بين المجموعات، بمعنى معرفة ما إذا كانت الفروق المعنوية موجودة بين جميع المتوسطات أم أنها موجودة بين بعض المتوسطات دون البعض الآخر ويستخدم فى ذلك

التحليل طريقة تسمى بطريقة " أقل فـــرق معنــوى" Least Significant Difference حيث تستخدم هذه الطريقة لمعرفة أى الفروق بين متوســطات المجموعات المختلفة معنوى وأيها غير معنوى ويتم ذلك على النحو التالى:

١)يحسب الفرق المطلق بين متوسطى كل مجموعتيـــن مـــن المجموعـــات المختلفة.

$$|\bar{س}_١ - \bar{س}_٢| \text{ ، } |\bar{س}_١ - \bar{س}_٣| \text{ ....} |\bar{س}_١ - \bar{س}_م|$$

$$|\bar{س}_٢ - \bar{س}_٣| \text{ ، ....، } |\bar{س}_٢ - \bar{س}_م|$$

$$|\bar{س}_{م-١} - \bar{س}_م|$$

٢)نحسب قيمة أقل فرق معنوى بين كل مجموعتين من المجموعات المختلفة وعند مستوى المعنوية α = ٥% مرة ، α = ١% مرة أخرى حيث:

أقل فروق معنوية (بين المجموعتين الأولى والثانية مثـــلا) وعنـــد مســـتوى المعنوية α.

$$= ت\left[م(ن-١)، \frac{\alpha}{٢}\right] \sqrt{ع^{٢}\left(\frac{١}{ن_١}+\frac{١}{ن_٢}\right)}$$

$$= ت\left[م(ن-١)، \frac{\alpha}{٢}\right] \sqrt{ع^{٢}\left(\frac{٢}{ن}\right)}$$

عندما $ن_١ = ن_٢ = ن$

حيث ت [م (ن -١) ، $\frac{\alpha}{٢}$] هى قيمة ت الجدولية عند درجات الحرية م(ن -١) (وهى درجات الحرية داخل المجموعات) ولمستوى المعنوية $\frac{\alpha}{٢}$

$ع^2$ عبارة عن متوسط مجموع المربعات داخل المجموعات

$ن_1$ ، $ن_2$ هما عدد المفردات فى المجموعتين الأولى والثانية على الترتيب.

٣)نقارن الفروق المطلقة بين متوسطى كل مجموعتين من المجموعات المختلفة والمحسوبة فى الخطوة (١) بقيمتى أقل فرق معنوى عند مستويى المعنوية ٥% ، ١% :

أ) فإذا كان الفرق المطلق بين متوسطى مجموعتين أكبر من قيمة أقل فرق معنوى عند مستوى المعنوية ١% فيعنى ذلك وجود فرق معنوى جداً بين متوسطى المجموعتين.

ب) وإذا كان الفرق المطلق بين متوسطى مجموعتين أصغر من قيمة أقل فرق معنوى عند مستوى المعنوية ٥% فيعنى ذلك أنه لا يوجد فرق معنوى بين متوسطى هاتين المجموعتين.

جـ) أما إذا كان الفرق المطلق بين متوسطى مجموعتين أكبر من قيمة أقل فرق معنوى عند ٥% ولكنه فى نفس الوقت أصغر من قيمة أقل فرق معنوى عند ١% ، أى أنه محصور بين القيمتين فإن ذلك يعنى وجود فرق معنوى بين متوسطى المجموعتين.

مثال (٣)

فى تجربة لمقارنة ٣ مجموعات تحتوى كل منها على ٥ مفردات حصلنا على النتائج التالية:

مجموع المربعات الكلى = ١٧٦ ، مجموع المربعات بين المجموعات = ١٠٤ وكان الأوساط الحسابية للمجموعات الثلاثة هى على الترتيب ١٠ ،٤ ،٦.

فالمطلوب:

١) اختبار معنوية الفروق بين متوسطات المجتمعات التى سخبت منها العينات بمستوى معنوية ٥%.

٢) إذا أظهر الاختبار وجود فروق معنوية بين المتوسطات فالمطلوب تحليل معنوية هذه الفروق.

الحـــل

م = ٣ ، ن = ٥

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

مجموع المربعات الكلى = ١٧٦

مجموع المربعات بين المجموعات = ١٠٤

مجموع المربعات داخل المجموعات = ١٧٦ - ١٠٤ = ٧٢

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	ف
بين المجموعات	٢	١٠٤	٥٢	٨,٦٧
داخل المجموعات	١٢	٧٢	٦	
الكلى	١٤	١٧٦		

ف الجدولية = ف (٢ ، ١٢ ، ٠,٠٥) = ٣,٨٨

ف الحسوبة > ف الجدولية.

لذا نرفض H_0 ونقبل H_1 وبالتالى يوجد فروق معنوية بين متوسطات المجموعات الثلاثة.

٣)تحليل معنوية الفروق:

أقل فرق معنوى (عند ٥%) = ت (١٢ ، ٠,٠٢٥) $\sqrt{ع^{٢} (\frac{٢}{ن})}$

= ٢,١٨ $\sqrt{٦ \times ٠,٤}$

= ٢,١٨ × ١,٥٥

= ٣,٣٨

أقل فرق معنوى (عند ٥%) = ت (١٢ ، ٠,٠٠٥) $\sqrt{ع^{٢} (\frac{٢}{ن})}$

=٣,٠٦ × ١,٥٥

=٤,٧٤

نحسب بعد ذلك الفرق المطلق بين كل وسطين حسابين ونقارنه بقيمتى أقل فرق معنوى كما يلى :

المقارنة	الفرق المطلق بين المتوسطات	أقل فرق معنوى عند	
		٥%	١%
الأولى و الثانية	$\lvert \bar{س}_{١} - \bar{س}_{٢} \rvert = \lvert ١٠ - ٤ \rvert = ٦$	٣,٣٨	٤,٧٤
الأولى و الثالثة	$\lvert \bar{س}_{١} - \bar{س}_{٣} \rvert = \lvert ١٠ - ٦ \rvert = ٤$	٣,٣٨	٤,٧٤
الثانية والثالثة	$\lvert \bar{س}_{٢} - \bar{س}_{٣} \rvert = \lvert ٤-٦ \rvert = ٢$	٣,٣٨	٤,٧٤

فيلاحظ: أن الفرق بين متوسطى المجموعتين الأولى والثانية معنوى جدا

وأن الفرق بين متوسطى المجموعتين الأولى والثالثة معنوى

وأن الفرق بين متوسطى المجموعتين الثانية والثالثة غير معنوى.

لذلك فإن المجموعة الأولى تعتبر أفضل المجموعات الثلاثة يوصـــى باستخدامها.

مثال (٤)

للمفاضلة بين أربعة أنواع من أغذية الأطفال تم تجربة النوع الأول على عينة مكونة من ٨ أطفال والنوع الثانى على عينة مكونة من ١٠ أطفال والنوعين الثالث والرابع كل منها على عينة من ١٢ طفل وبعد شهرين من بـــدء التجربـــة كـــانت متوسطات الأوزان فى المجموعات الأربع بالكيلو جرام هـــى ٦,٥ ، ٨,٢ ، ٥,٦ ، ٩,٥ على الترتيب. فإذا كان جدول تحليل التباين على الصورة:

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	ف
بين المجموعات	؟	؟	؟	؟
داخل المجموعات	؟	؟	؟	
الكلى	؟	١٨٤		

فالمطلوب:

١) استكمال البيانات الناقصة فى جدول تحليل التباين واختبار معنوية الفروق بيـــن متوسطات الأنواع الأربعة من الغذاء بدرجة ثقة ٩٩%.

٢) إذا أظهر الاختبار وجود فروق معنوية بين الأنـــواع الأربعـــة مـــن الغـــذاء فالمطلوب تحليل هذه الفروق بين كل اثنين من هذه الأنواع.

الحـــل

عدد المجموعات (م) = ٤ ، العدد الكلى للمفردات = ٤٢

جدول تحليل التباين

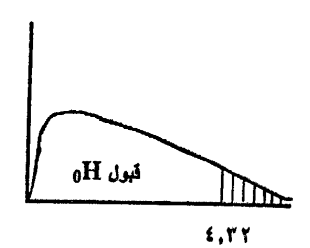
مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع التربيعات	متوسط المربعات	ف
بين المجموعات	٣	١٠٨	٣٦	١٨
داخل المجموعات	٣٨	٧٦	٢	
الكلى	٤١	١٨٤		

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4$

ف المحسوبة (من جدول تحليل التباين) = ١٨

ف الجدولية = ف (٣، ٣٨، ٠،٠١) = ٤،٣٤



حيث أن ف المحسوبة تقع فى منطقة الرفض ، فنرفض H_0 ونقبل H_1

بمعنى أنه توجد فروق معنوية بين متوسطات الأنواع الأربعة.

٢) لتحليل معنوية الفروق بين كل اثنين من المعالجات نجرى اختبار أقل فرق معنوى كما يلى:-

- بين المجموعتين الأولى والثانية: ن١ = ٨ ، ن٢ = ١٠

أقل فروق معنوية (لمستوى معنوية ٥%).

= ت (٠,٠٢٥ ، ٣٨) $\sqrt{٢\left(\frac{١}{٨}+\frac{١}{١٠}\right)}$

= ٢,٠٢ × ٠,٦٧

=١,٣٥

أقل فرق معنوى (لمستوى معنوية ١%)

= ت (٠,٠٠٥ ، ٣٨) $\sqrt{٢\left(\frac{١}{٨}+\frac{١}{١٠}\right)}$

= ٢,٦٩ × ٠,٦٧

=١,٨٠

- بين المجموعتين الأولى والثالثة : $ن_١$ = ٨ ، $ن_٣$ = ١٢ .

أقل فرق معنوى (لمستوى معنوية ٥%)

= ت (٠,٠٢٥ ، ٣٨) $\sqrt{٢\left(\frac{١}{٨}+\frac{١}{١٢}\right)}$

= ٢,٠٢ × ٠,٦٤

=١,٢٩

أقل فرق معنوى (لمستوى معنوية ١%)

= ت (٠,٠٠٥ ، ٣٨) $\sqrt{٢\left(\frac{١}{٨}+\frac{١}{١٢}\right)}$

= ٢,٦٩ × ٠,٦٤

=١,٧٢

- بين المجموعتين الأولى والرابعة: $ن_١$ = ٨ ، $ن_٤$ = ١٢

هى نفس النتائج فى حالة المقارنة بين المجموعتين الأولى والثالثة.

- بين المجموعتين الثانية والثالثة: $ن_٢ = ١٠$ ، $ن_٣ = ١٢$

أقل فرق معنوى (لمستوى معنوية ٥%)

$$= ت\ (٣٨ ،\ ٠{,}٠٢٥) \sqrt{٢\left(\frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٢}\right)}$$

$$= ٢{,}٠٢ \times ٠{,}٦$$

$$= ١{,}٢١$$

أقل فرق معنوى (ستوى معنوية ١%)

$$= ت\ (٣٨ ،\ ٠{,}٠٠٥) \sqrt{٢\left(\frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٢}\right)}$$

$$= ٢{,}٦٩ \times ٠{,}٦$$

$$= ١{,}٦١$$

- بين المجموعتين الثانية والرابعة: $ن_٢ = ١٠$ ، $ن_٤ = ١٢$

فتكون نفس النتائج فى حالة المقارنة بين المجموعتين الثانية والثالثة.

- بين المجموعتين الثالثة والرابعة: $ن_٣ = ١٢$ ، $ن_٤ = ١٢$

أقل فرق معنوى (لمستوى معنوية ٥%)

$$= ت\ (٣٨ ،\ ٠{,}٠٢٥) \sqrt{٢\left(\frac{٢}{١٢}\right)}$$

$$= ٢{,}٠٢ \times ٠{,}٥٨$$

$$= ١{,}١٧$$

أقل فرق معنوى (لمستوى معنوية ١%)

$$= ت\ (٣٨ ، ٠,٠٠٥)\ \sqrt{٢\left(\frac{٢}{١٢}\right)}$$

$$= ٢,٦٩ \times ٠,٥٨ = ١,٥٦$$

ويكون جدول المقارنات كما يلى:

المقارنة	الفرق المطلق بين المتوسطات	أقل فرق معنوي عند	
		%٥	%١
الأولى و الثانية	$\lvert$ س̄١ − س̄٢ $\rvert$ = $\lvert$ ٦,٥−٨,٢ $\rvert$ = ١,٧	١,٣٥	١,٨
الأولى و الثالثة	$\lvert$ س̄١ − س̄٣ $\rvert$ = $\lvert$ ٦,٥−٥,٦ $\rvert$ = ٠,٩	١,٢٩	١,٧٢
الأولى والرابعة	$\lvert$ س̄١ − س̄٤ $\rvert$ = $\lvert$ ٦,٥−٩,٥ $\rvert$ = ٣	١,٢٩	١,٧٢
الثانية والثالثة	$\lvert$ س̄٢ − س̄٣ $\rvert$ = $\lvert$ ٨,٢−٥,٦ $\rvert$ = ٢,٦	١,٢١	١,٦١
الثانية والرابعة	$\lvert$ س̄٢ − س̄٤ $\rvert$ = $\lvert$ ٨,٢−٩,٥ $\rvert$ = ١,٣	١,٢١	١,٦١
الثالثة والرابعة	$\lvert$ س̄٣ − س̄٤ $\rvert$ = $\lvert$ ٥,٦−٩,٥ $\rvert$ = ٣,٩	٣,١٧	١,٥٦

ومن المقارنات السابقة نصل إلى:

بين المجموعتين الأولى والثانية — يوجد فرق معنوى

بين المجموعتين الأولى والثالثة — لا يوجد فرق معنوى

بين المجموعتين الأولى والرابعة — يوجد فرق معنوى جداً

بين المجموعتين الثانية والثالثة — يوجد فرق معنوى جداً

بين المجموعتين الثانية والرابعة — يوجد فرق معنوى

بين المجموعتين الثالثة والرابعة — يوجد فرق معنوى جداً.

مثال (٥)

فى دراسة للمقارنة بين تأثير أربعة طرق مختلفة لتدريس مادة الحاسب الآلى طبقت فى أربع محافظات، وفى نهاية المدة كانت الدرجات التى حصل عليها الدارسون فى المحافظات الأربع كما يلى:

طرق التدريس (المعالجات)	درجات الدارسين				
طريقة التدريس الأولى A	٦	٤	٥	٣	
طريقة التدريس الثانية B	٨	١٠	٧	١١	٩
طريقة التدريس الثالثة C	٥	٧	٦		
طريقة التدريس الرابعة D	٢	٥	٣	٢	

المطلوب:

١-اختبار معنوية الفروق بين تأثير طرق التدريس الأربعة على مستوى آداء الدارسين بدرجة ثقة ٩٩%.

٢-إذا أظهر الإختبار السابق وجود فروق معنوية بين تأثير المعالجات المختلفة فالمطلوب تحليل معنوية الفرق بين كل زوج من المعالجات باستخدام طريقة L . S. D.

الحـل

١) م = ٤ ، ن$_{١}$ = ٤ ، ن$_{٢}$ = ٥ ، ن$_{٣}$ = ٣ ، ن$_{٤}$ = ٤

تصاغ المشكلة على صورة الفرضين الآتيين:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4$

نكون الجدول التالى:

D		C		B		A	
$س_٤^٢$	$س_٤$	$س_٣^٢$	$س_٣$	$س_٢^٢$	$س_٢$	$س_١^٢$	$س_١$
٤	٢	٢٥	٥	٦٤	٨	٣٦	٦
٢٥	٥	٤٩	٧	١٠٠	١٠	١٦	٤
٩	٣	٣٦	٦	٤٩	٧	٢٥	٥
٤	٢			١٢١	١١	٩	٣
				٨١	٩		
٤٢	١٢	١١٠	١٨	٤١٥	٤٥	٨٦	١٨

العدد الكلى للمفردات = ٤ + ٥ + ٣ +٤ = ١٦

المجموع الكلى للمفردات = س.. = ١٨ + ٤٥ + ١٨ + ١٢ = ٩٣

$$\text{معامل التصحيح} = \frac{(\text{س..})^2}{\text{العدد الكلى للمفردات}} = \frac{(٩٣)^2}{١٦} = ٥٤٠,٥٦٢٥$$

$$\text{مجموع المربعات الكلى} = \text{م م ك} = \sum_{ر=١}^{٤} \sum_{و=١}^{ن_ى} س^2_{رو} - \text{معامل التصحيح}$$

= (٨٦+٤١٥+١١٠+٤٢) - ٥٤٠,٥٦٢٥

= ٦٥٣ - ٥٤٠,٥٦٢٥ = ١١٢,٤٣٧٥

مجموع المربعات بين المعالجات

$$\text{م م ج} = \frac{(١٨)^2}{٤} + \frac{(٤٥)^2}{٥} + \frac{(١٨)^2}{٣} + \frac{(١٢)^2}{٤} - ٥٤٠,٥٦٢٥$$

= ٨٩,٤٣٧٥

مجموع مربعات الخطأ = مجموع المربعات الكلى - مجموع المربعات بين المعالجات

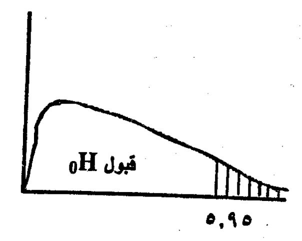
م م خ = م م ك - م م ج

= ١١٢٠,٤٣٧٥ - ٨٩,٤٣٧٥ = ٢٣

ويكون جدول تحليل التباين كما يلى:

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات (التباين)	ف
بين المعالجات	٣	٨٩,٤٣٧٥	٢٩,٨١٢٥	١٥,٥٥٢
الخطأ التجريبى	١٢	٢٣	١,٩١٧	
الكلى	١٥	١١٢,٤٣٧٥		

ف الجدولية = ف (٣، ١٢، ٠,٠١) = ٥,٩٥



حيث أن $ف_1$ المحسوبة > ف الجدولية لذا نرفض H_0 ونقبل H_1 ، ويعنى ذلك أنه توجد فروق معنوية بين تأثير طرق التدريس الأربعة على مستوى تحصيل الدارسين.

٢) لتحليل معنوية الفروق بين كل زوج من المعالجات باستخدام طريقة L.S.D.

حيث:

$$\bar{س}_1 = \frac{١٨}{٤} = ٤,٥$$

$$\bar{س}_2 = \frac{٤٥}{٥} = ٩$$

$$\bar{س}_3 = \frac{١٨}{٣} = ٦$$

$$\bar{س}_4 = \frac{١٢}{٤} = ٣$$

أ-المقارنة بين المعالجتين الأولى والثانية حيث: $ن_1 = ٤$ ، $ن_2 = ٥$

أقل فرق معنوى عند ٥% = $ت(١٢ ، ٠,٠٢٥) \times \sqrt{١,٩١٧ \times (\frac{١}{٤} + \frac{١}{٥})}$

$= ٢,١٧٩ \times ٠,٩٦٣٧ = ٢,٠٩٩$

أقل فرق معنوى عند ١% = $ت(١٢ ، ٠,٠٠٥) \times \sqrt{١,٩١٧ \times (\frac{١}{٤} + \frac{١}{٥})}$

$= ٣,٠٥٥ \times ٠,٩٦٣٧ = ٢,٩٤٤$

ب- المقارنة بين المعالجتين الأولى والثالثة: $ن_1 = ٤$ ، $ن_3 = ٣$

أقل فرق معنوى عند ٥% = $ت(١٢ ، ٠,٠٢٥) \times \sqrt{١,٩١٧ \times (\frac{١}{٤} + \frac{١}{٣})}$

$= ٢,١٧٩ \times ١,٠٥٧ = ٢,٣٠٣$

أقل فرق معنوى عند ١% = $ت(١٢ ، ٠,٠٠٥) \times ١,٠٥٧$

$= ٣.٠٥٥ \times ١,٠٥٧ = ٣,٢٢٩$

جـ) المقارنة بين المعالجتين الأولى والرابعة: $ن_1 = ٤$ ، $ن_4 = ٤$

أقل فرق معنوى عند٥% = ٢,١٧٩ × $\sqrt{١,٩١٧ (\frac{٢}{٤})}$

= ٢,١٧٩ × ٠,٩٧٩ = ٢,١٣٣

أقل فرق معنوى عند ١% = ٣,٠٥٥ × ٠,٩٧٩ = ٢,٩٩١

د- المقارنة بين المعالجتين الثانية والثالثة: $ن_{٢}$ = ٥ ، $ن_{٣}$ = ٣.

أقل فرق معنوى عند ٥% = ٢,١٧٩ × $\sqrt{١,٩١٧ (\frac{١}{٥} + \frac{١}{٣})}$

= ٢,١٧٩ × ١,٠١١ = ٢,٢٠٣

أقل فرق معنوى عند ١% = ٣,٠٥٥ × ١,٠١١ = ٣,٠٨٩

و- المقارنة بين المعالجتين الثانية والرابعة: $ن_{٢}$ = ٥ ، $ن_{٤}$ = ٤

أقل فرق معنوى عند ٥% = ٢,٠٩٩

أقل فرق معنوى عند ١% = ٢,٩٤٤

وذلك لأن هذه الحالة تماثل تماماً الحالة (أ) .

ل- المقارنة بين المعالجتين الثالثة والرابعة حيث: $ن_{٣}$ = ٣ ، $ن_{٤}$ = ٤

أقل فرق معنوى عند ٥% = ٢,٣٠٣

أقل فرق معنوى عند ١% = ٣,٢٢٩

وذلك لأن هذه الحالة تماثل تماماً الحالة (ب)

يتم عمل جدول المقارنات كما يلى:

المقارنة	الفرق المطلق بين المتوسطات	أقل فرق معنوي عند		القرار
		٥%	١%	
الأولى و الثانية	|س١-س٢| = |٤,٥-٩| = ٤,٥	٢,٠٩٩	٢,٩٤٤	يوجد فرق معنوى جداً
الأولى و الثالثة	|س١-س٣| = |٤,٥-٦| = ١,٥	٢,٣٠٣	٣,٢٢٩	لا يوجد فرق معنوى
الأولى والرابعة	|س١-س٤| = |٤,٥-٣| = ١,٥	٢,١٣٣	٢,٩٩١	لا يوجد فرق معنوى
الثانية والثالثة	|س٢-س٣| = |٩-٦| = ٣	٢,٢٠٣	٣,٠٨٩	يوجد فرق معنوى
الثانية والرابعة	|س٢-س٤| = |٩-٣| = ٦	٢,٠٩٩	٢,٩٤٤	يوجد فرق معنوى جداً
الثالثة والرابعة	|س٣-س٤| = |٦-٣| = ٣	٢,٣٠٣	٣,٢٢٩	يوجد فرق معنوى

وكما هو واضح فإن المعالجة الثانية وهى المعالجة (B) هى المعالجة المميزة ، وحيث أن لها أكبر قيمة لمتوسط درجات تحصيل الطلاب لذلك فإن طريقة التدريس الثانية (B) هى الطريقة الأفضل ونوصى بتعميمها.

(٤ -٣): تحليل التباين فى اتجاهين

فى حالة تحليل التباين فى اتجاهين يكون لدينا عادة متغيرين أثنـين ولكـل متغير منهما عدة مستويات بحيث تقع مشاهدة واحدة فقط فى كل خلية من الخلايـا المشتركة بين المتغيرين والتى يتكون منها الجدول الناتج.

فى هذه الحالة يتم تقسيم المفردات التجريبية إلى مجموعات مختلفـة طبقـاً لصفتين اثنتين (أى متغيرين) كأن يتم تقسيم عينة من الطلاب إلى مجموعات وفـق المستوى الاجتماعى والمستوى التحصيلى لكل طالب منهم، أو تقسيم هؤلاء الطلاب إلى مجموعات وفق ممارسة الأنشـطة الرياضـية وظـاهرة التـدخين، وهكـذا. ومن أمثلة تحليل التباين فى اتجاهين (أو التصنيف الثنائى) أيضاً ما يلى:

- أنواع (أو تركيزات) مختلفة من الأسمدة مطلوب تجربة أثرها علـى عـدة أنواع مختلفة من التربة الزراعية لدراسة أثر ذلك على تنمية إنتاجية الفدان من محصول معين.
- عدة طرق تعليمية مختلفة يراد تطبيقها على ثلاث نوعيات مـن الطـلاب حسب نوع الثانوية العامة (علمى علوم - علمى رياضيات - أدبى) لمعرفة مدى فاعليتها فى التحصيل.

فإذا إفترضنا أن عدد مستويات المتغير الأول هو م ، وأن عدد مسـتويات المتغير الثانى هو ن فإن جدول البيانات فى هذه الحالة يأخذ الصورة :

المتغير الثانى / المتغير الأول	١	٢	٣	....	ن	المجموع
١	$س_{١١}$	$س_{٢١}$	$س_{٣١}$	....	$س_{١ن}$	$س_{١.}$
٢	$س_{١٢}$	$س_{٢٢}$	$س_{٣٢}$	....	$س_{٢ن}$	$س_{٢.}$
٣	$س_{١٣}$	$س_{٢٣}$	$س_{٣٣}$	....	$س_{٣ن}$	$س_{٣.}$
:	:					
:	:					
م	$س_{م١}$	$س_{م٢}$	$س_{م٣}$	....	$س_{م ن}$	$س_{م.}$
المجموع	$س_{.١}$	$س_{.٢}$	$س_{.٣}$	....	$س_{.ن}$	$س_{..}$

حيث $س_{ر و}$ هى القراءة الخاصة بالمستوى ر من المتغير الأول والمستوى و من المتغير الثانى.

فمثلاً، $س_{٣٢}$ هى القراءة الخاصة بالمستوى الثانى من المتغير الأول والمستوى الثالث من المتغير الثانى أى المشاهدة الموجودة فى الصف الثانى والعمود الثالث.

ونلاحظ أن:

$س_{ر.}$ = مجموع قراءات الصف رقم ر (حيث ر = ١، ٢، .... م)

$$= \underset{و=١}{\overset{ن}{مجـ}} س_{ر و}$$

$س_{.و}$ = مجموع قراءات العمود رقم و (حيث و = ١، ٢ ، ...... ، ن)

$$= \underset{ر=١}{\overset{م}{مجـ}} س_{ر و}$$

س.. = المجموع الكلى للقراءات

$$= \underset{ر=1}{\overset{م}{مجـ}} \; \underset{و=1}{\overset{ن}{مجـ}} س_{رو}$$

$$= \underset{ر=1}{\overset{م}{مجـ}} س_{ر.} = \underset{و=1}{\overset{ن}{مجـ}} س_{.و}$$

ولاختبار معنوية الفروق بين مستويات المتغير الأول (الصفوف) أو بين مستويات المتغير الثانى(الأعمدة) تتلخص الخطوات فى الآتى:

١- نحسب معامل التصحيح وهو يســاوى $\frac{(س..)^2}{م \times ن}$

٢- مجموع المربعات الكلـــى = $\underset{ر=1}{\overset{م}{مجـ}} \; \underset{و=1}{\overset{ن}{مجـ}} س^2_{رو} - \frac{(س..)^2}{م \times ن}$

٣- مجموع المربعات بين الصفوف = $\frac{\underset{ر=1}{\overset{م}{مجـ}} س^2_{ر.}}{ن} - \frac{(س..)^2}{م \times ن}$

$$\frac{س^2_{1.} + س^2_{2.} + ... + س^2_{م.}}{ن} - \frac{(س..)^2}{م \times ن}$$

٤- مجموع المربعات بين الأعمدة $= \dfrac{\text{مجـ}_{\text{ر}=1}\ \text{س}^{2}_{.\text{و}}}{\text{م}} - \dfrac{(\text{س}..)^{2}}{\text{م} \times \text{ن}}$

$$= \frac{\text{س}^{2}_{.1} + \text{س}^{2}_{.2} + \ldots\ldots\ldots + \text{س}^{2}_{.\text{ن}}}{\text{م}} - \frac{(\text{س}..)^{2}}{\text{م} \times \text{ن}}$$

٥- مجموع مربعات الخطأ التجريبى = مجموع المربعات الكلى - مجموع المربعات بين الصفوف - مجموع المربعات بين الأعمدة.

$$= \text{مجـ}_{\text{ر}=1}\ \text{مجـ}_{\text{و}=1}\ \text{س}^{2}_{\text{ر}\text{و}} - \frac{\text{مجـ}_{\text{ر}=1}\ \text{س}^{2}_{\text{ر}.}}{\text{ن}} - \frac{\text{مجـ}_{\text{و}=1}\ \text{س}_{.\text{و}}}{\text{م}} + \frac{(\text{س}..)^{2}}{\text{م} \times \text{ن}}$$

وبعد حساب المجاميع السابقة يكون جدول تحليل التباين كما يلى :

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	ف
بين الصفوف	م − ١	م م ب ص	م م ب ص/ (م−١)	ف١= (م م ب ص / (م − ١)) / (م م خ/ (م−١)(ن−١))
بين الأعمدة	ن − ١	م م ب ع	م م ب ع / (ن−١)	ف٢= (م م ب ع / (ن − ١)) / (م م خ/ (م−١)(ن−١))
الخطـأ التجريبى	(م−١) (ن−١)	م م خ	م م خ/ (م−١) (ن−١)	
الكـلى	م ن − ١			

أى أن :

$$\text{ف}_1 \text{ المحسوبة (للصفوف)} = \frac{\text{متوسط المربعات بين الصفوف}}{\text{متوسط مربعات الخطأ التجريبى}}$$

$$\text{ف}_2 \text{ المحسوبة (للأعمدة)} = \frac{\text{متوسط المربعات بين الأعمدة}}{\text{متوسط مربعات الخطأ التجريبى}}$$

عند إختبار معنوية الفروق بين مستويات المتغير الأول الذى تمثله الصفوف فإن :

$H_o : \mu_1 = \mu_2 = \dots\dots\dots\dots\dots \mu_{\text{م}}$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \dots\dots\dots \neq \mu_{\text{م}}$

نقارن قيمة ف١ (للصفوف) بقيمة ف الجدولية عند درجات الحرية (م−١)، (م−١) (ن−١)، ولمستوى المعنوية α أى :

ف [(م−١)، (م−١) (ن−١)، α] ونقرر حينئذ قبول أو رفض H_o

بالمثل عند إختبار معنوية الفروق بين مستويات المتغير الثانى الذى يمثله الأعمدة فإن :

$H_o : \acute{\mu}_1 = \acute{\mu}_2 = \dots\dots\dots\dots\dots \acute{\mu}_{\text{ن}}$

$H_1 : \acute{\mu}_1 \neq \acute{\mu}_2 \neq \dots\dots\dots \neq \acute{\mu}_{\text{ن}}$

نقارن قيمة ف٢ (للأعمدة) بالقيمة الجدولية وهى:

ف [(ن−١)، (م−١) (ن−١)، α] ونقرر أو نرفض بعد ذلك H_o

مثال (٦)

الآتى بيان بإنتاجية أحد المصانع فى اليوم حسب نوع الآلة المستخدمة (A, B, C)
وحسب مدة خبرة العامل الذى يشغل الآلة (بالسنوات):

الآلـــة / مدة خبرة العامل	١	٢	٣	٤	٥
A	٤٦	٤٧	٤٩	٥٠	٥٣
B	٥٢	٥٥	٥٤	٥٨	٦١
C	٤٩	٥١	٥٠	٥٤	٥١

والمطلوب:

١- إختبار معنوية الفرق بين إنتاجية الآلات الثلاثة.

٢- إختبار معنوية الفرق بين العمال حسب مدة خبرتهم.

تحليل معنوية الفروق بين متوسطات الإنتاجية حسب نوع الآلة وبين متوسطات الإنتاجية حسب مدة خبرة العامل (بالنسبة للعـــاملين الأول والخـــامس فقـــط). باستخدام طريقة أقل فرق معنوى إذا لزم الأمر.

(استخدم مستوى معنوية ٥ %)

الحـــل:

سوف نستخدم تحليل التباين فى اتجاهين لإجراء الاختبارين المطلوبين كما يلى:

مدة الخبرة / الآلـــة	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
A	٤٦ ٢١١٦	٤٧ ٢٢٠٩	٤٩ ٢٤٠١	٥٠ ٢٥٠٠	٥٣ ٢٨٠٩	٢٤٥ ١٢٠٣٥
B	٥٢ ٢٧٠٤	٥٥ ٣٠٢٥	٥٤ ٢٩١٦	٥٨ ٣٣٦٤	٦١ ٣٧٢١	٢٨٠ ١٥٧٣٠
C	٤٩ ٢٤٠١	٥١ ٢٦٠١	٥٠ ٢٩١٦	٥٤ ٢٩١٦	٥١ ٢٦٠١	٢٥٥ ١٣٠١٩
المجموع	١٤٧ ٧٢٢١	١٥٣ ٧٨٣٥	١٥٣ ٧٨١٧	١٦٢ ٨٧٨٠	١٦٥ ٩١٣١	٧٨٠ ٤٠٧٨٤

وكما هو واضح فإن :

$م = ٣$ ، $ن = ٥$ ، $س_{..} = ٧٨٠$

$$\text{معامل التصحيح} = \frac{(س_{..})^{٢}}{م \times ن} = \frac{(٧٨٠)^{٢}}{٣ \times ٥} = ٤٠٥٦٠$$

$$\text{مجموع المربعات الكلى} = \sum_{ر=١}^{٣} \sum_{و=١}^{٥} س_{رو}^{٢} - \text{معامل التصحيح}$$

$$= ٤٠٧٨٤ - ٤٠٥٦٠ = ٢٢٤$$

$$\text{مجموع المربعات للصفوف} = \frac{\sum_{ر=١}^{م} س_{ر.}^{٢}}{ن} - \text{معامل التصحيح}$$

$$= \frac{(٢٤٥)^{٢} + (٢٨٠)^{٢} + (٢٥٥)^{٢}}{٥} - ٤٠٥٦٠ = ١٣٠$$

$$\text{مجموع مربعات الأعمدة} = \frac{\sum_{و=١}^{ن} س^{٢}_{.و}}{م} - \text{معامل التصحيح}$$

$$= \frac{(١٤٧)^{٢} + (١٥٣)^{٢} + (١٥٣)^{٢} + (١٦٢)^{٢} + (١٦٥)^{٢}}{٣} - ٤٠٥٦٠ = ٧٢$$

مجموع مربعات الخطأ = مجموع المربعات الكلى – مجموع المربعات بين الصفوف

– مجموع المربعات بين الأعمدة

= ٢٢٤ - ١٣٠ - ٧٢ = ٢٢

ويكون جدول تحليل التباين كما يلى:

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	
بين الصفوف (بين الآلات)	٢	١٣٠	٦٥	
بين الأعمدة (بين العمال)	٤	٧٢	١٨	
الخطأ التجريبى	٨	٢٢	٢,٧٥	
الكلى	١٤	٢٢٤		

١- اختبار معنوية الفرق بين إنتاجية الآلات فإن :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

$$\text{ف المحسوبة} = \frac{\text{متوسط المربعات بين الآلات (أى بين الصفوف)}}{\text{متوسط مربعات الخطأ}}$$

$$= \frac{٦٥}{٢,٧٥} = ٢٣,٦٤$$

ف الجدولية = ف (٢، ٨، ٠,٠٥) = ٤,٤٦

حيث أن ف المحسوبة > ف الجدولية

لذلك نرفض H_o ونقبل H_1 ، أى أنه توجد فروق معنوية بين إنتاجية الآلات الثلاثة.

٢-لإختيار معنوية الفروق بين العمال فإن

$H_o: \acute{\mu}_1 = \acute{\mu}_2 = \acute{\mu}_3 = \acute{\mu}_4 = \acute{\mu}_5$

$M_1: \acute{\mu}_1 \neq \acute{\mu}_2 \neq \acute{\mu}_3 \neq \acute{\mu}_4 \neq \acute{\mu}_5$

$$\text{ف المحسوبة} = \frac{\text{متوسط المربعات بين العمال (بين الأعمدة)}}{\text{متوسط مربعات الخطأ}}$$

$$= \frac{١٨}{٢,٧٥} = ٦,٥٥$$

ف الجدولية = ف (٤، ٨، ٠,٠٥) = ٣,٨٤

وحيث أن ف المحسوبة أكبر من ف الجدولية، لذلك نرفض H_0 ونقبل H_1 ويعنى ذلك أنه توجد فروق معنوية بين إنتاجية العمال حسب سنوات الخبرة.

٣- حيث أن إختبار ف أظهر أن هناك فروق معنوية بين متوسطات الإنتاجية حسب نوع الآلات فيلزم إجراء تحليل معنوية الفروق بين تلك المتوسطات باستخدام طريقة أقل فرق معنوى كما يلى :

أقل فرق معنوى عند مستوى المعنوية ٥%

$$= ت [(م - ١) (ن-١) ، \frac{\alpha}{٢}] \times \sqrt{ع^{٢}_{خ} (\frac{٢}{م})}$$

$$= ت [(٣ - ١) (٥ - ١) ، ٠,٠٢٥] \times \sqrt{٢,٧٥ (\frac{٢}{٣})}$$

$= ت (٨، ٠,٠٢٥) \times ١,٨٣٣$

$= ٢,٣٠٦ \times ١,٨٣٣ = ٤,٢٣$

أقل فرق معنوى عند مستوى المعنوية ١ %

$= ت (٨، ٠,٠٠٥) \times ١,٨٣٣$

$= ٣,٣٥٥ \times ١,٨٣٣ = ٦,١٥$

كما أن متوسطات الإنتاجية حسب نوعية الآلات هى :

$$\bar{س}_{١} = \frac{٢٤٥}{٥} = ٤٩$$

$$\bar{س}_{٢} = \frac{٢٨٠}{٥} = ٥٦$$

$$\bar{س}_{٣} = \frac{٢٥٥}{٥} = ٥١$$

يتم تكوين جدول المقارنات كما يلى :

المقارنة	**الفرق المطلق بين المتوسطات**	**أقل فرق معنوى عند:**	
		٥%	**١%**
الأولى والثانية	$\lvert \bar{س}_{١} - \bar{س}_{٢} \rvert = \lvert ٤٩ - ٥٦ \rvert = ٧$	٤,٢٣	٦,١٥
الأولى والثالثة	$\lvert \bar{س}_{١} - \bar{س}_{٣} \rvert = \lvert ٤٩ - \lvert ٥ \rvert = ٢$	٤,٢٣	٦,١٥
الثانية والثالثة	$\lvert \bar{س}_{٢} - \bar{س}_{٣} \rvert = \lvert ٥٦ - \lvert ٥ \rvert = ٥$	٤,٢٣	٦,١٥

وكما هو واضح فإنه يوجد فرق معنوى جدا فى متوسطات الإنتاجية بين الآلتين الأولى والثانية، ولا يوجد فرق معنوى فى متوسطات الإنتاجية بين الآلتين الأولى والثالثة، ويوجد فرق معنوى فى متوسطات الإنتاجية بين الآلتين الثانية والثالثة، لذلك فإن المجموعة المميزة هى المجموعة الثانية أى أن إنتاجية الآلة الثانية هى الأفضل معنويا ونوصى باستخدامها فى العملية الإنتاجية.

وحيث أظهر إختبار ف وجود فروق معنوية بين متوسطات الإنتاجية حسب مدة خبرة العامل، فلتحليل معنوية الفرق بين متوسطى الإنتاجية حسب مدة الخبرة للعاملين الأول والخامس نلاحظ أن:

$$\bar{س}_{١} = \frac{١٤٧}{٣} = ٤٩$$

$$\bar{س}_{٥} = \frac{٢٤٥}{٣} = ٥٥$$

أقل فرق معنوى عند مستوى المعنوية ٥%

$$= ت \left[(م - ١)(ن-١) ، \frac{\alpha}{٢} \right] \times \sqrt{ع^{٢}_{خ} \left(\frac{٢}{ن} \right)}$$

$$= ت \left[(٨، ٠,٠٢٥) \right] \times \sqrt{٢,٧٥ \left(\frac{٢}{٥} \right)}$$

= ٢,٣٠٦ × ١,٠٥ = ٢,٤٢

أقل فرق معنوى عند مستوى المعنوية ١ %

= ت (٨، ٠,٠٠٥) × ١,٠٥

= ٣,٣٥٥ × ١,٠٥ = ٣,٢٥

ويتم عمل جدول المقارنات بين متوسطات الإنتاجية للعاملين الأول والخامس كما يلى:

المقارنة	الفرق المطلق بين المتوسطات	أقل فرق معنوى	
		٥%	١%
الأول والخامس	$\lvert \bar{س}_{١} - \bar{س}_{٥} \rvert$ = | ٤٩ – ٥٥ | = ٦	٢,٤٢	٣,٥٢

وكما هو واضح من المقارنة فإنه يوجد فرق معنوى جداً فى الإنتاجية بين مدتى خبرة العامل الأولى والخامسة.

مثال (٧)

للمقارنة بين إنتاجية الفدان من محصول الطماطم صممت تجربة استخدمت فيها ثلاثة أنواع من بذور الطماطم هى: A, B, C وثلاثة نظم مختلفة للرى هى: الغمر والتنقيط والرش، وكانت إنتاجية الفدان (بالطن) كما يلى:

نظام الرى / البذرة	الغمر	التنقيط	الرش
A	٨	٦	١٠
B	٦	٦	٦
C	١٦	١٢	١١

المطلوب:

١- اختبار معنوية الفروق أثر الأنواع المختلفة من البذور على إنتاجية الفدان

٢- اختبار معنوية الفروق بين أثر نظم الرى المختلفة على انتاجية الفدان

٣- تحليل معنوية الفروق فى (١) أو (٢) إذا لزم الأمر.

(استخدم درجة ثقة ٩٥% فى (١) ، (٢))

الحل

م = ٣ ، ن = ٣ ، α = ٠,٠٥

لإختبار معنوية الفروق بين أثر كل من الأنواع المختلفة من البذور ونظم الرى المختلفة على إنتاجية الفدان من الطماطم يلزم تكوين الجدول الآتى :

نظام الرى / البذور	الغمر		التنقيط		الرش		المجموع	
	$س_١$	$س_١^٢$	$س_٢$	$س_٢^٢$	$س_٣$	$س_٣^٢$	$س_{ر.}$	
A	٨	٦٤	٦	٣٦	١٠	١٠٠	٢٤	٢٠٠
B	٦	٣٦	٦	٣٦	٦	٣٦	١٨	١٠٨
C	١٦	٢٥٦	١٢	١٤٤	١١	١٢١	٣٩	٥٢١
المجموع س .و	٣٠	٣٥٦	٢٤	٢١٦	٢٧	٢٥٧		

من الجدول السابق يتضح أن :

مجموع القيم = $مجـ_{ر=١}^{٣}\ مجـ_{و=١}^{٣}\ س_{رو}$ = س.. = ٢٤+١٨+٣٩ (مجاميع الصفوف)

= ٣٠ + ٢٤ + ٢٧ (مجاميع الأعمدة) = ٨١

مجموع مربعات القيم = $مجـ_{ر=١}^{٣}\ مجـ_{و=١}^{٣}\ س_{رو}^{٢}$

= ٢٠٠ + ١٠٨ + ٥٢١ (مجاميع مربعات الصفوف)

= ٣٥٦ + ٢١٦ + ٢٥٧ (مجاميع مربعات الأعمدة) = ٨٢٩

$$\text{مجموع المربعات الكلى} = \sum_{ر=1}^{3}\sum_{و=1}^{3} س_{رو}^{2} - \frac{(س..)^{2}}{م \times ن}$$

$$= ٨٢٩ - \frac{(٨١)^{2}}{٣ \times ٣}$$

$$= ٨٢٩ - ٧٢٩ = ١٠٠$$

مجوع المربعات بين الصفوف

$$= \frac{\sum_{ر=1}^{3} (س_{ر.})^{2}}{ن} - \frac{(س..)^{2}}{م \times ن}$$

$$= \frac{(٢٤)^{2} + (١٨)^{2} + (٣٩)^{2}}{٣} - ٧٢٩$$

$$= ٨٠٧ - ٧٢٩ = ٧٨$$

مجموع المربعات بين الأعمدة

$$= \frac{\sum_{و=1}^{3} (س_{.و})^{2}}{م} - \frac{(س..)^{2}}{م \times ن}$$

$$= \frac{(٣٠)^{2} + (٢٤)^{2} + (٢٧)^{2}}{٣} - ٧٢٩$$

$$= ٧٣٥ - ٧٢٩ = ٦$$

مجموع مربعات الخطأ التجريبى

= مجموع المربعات الكلى – مجموع المربعات بين الصفوف – مجموع المربعات بين الأعمدة

= ١٠٠ – ٧٨ – ٦ = ١٦

يتم تكوين جدول تحليل التباين كما يلى :

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	نسبة التباين
بين الصفوف (نوع البذور)	٢	٧٨	٣٩	ف١ = $\frac{٣٩}{٤}$ = ٩,٧٥
بين الأعمدة (نظام الرى)	٢	٦	٣	ف٢ = $\frac{٣}{٤}$ = ٠,٧٥
الخطأ التجريبى	٤	١٦	٤	
الكلى	٨	١٠٠		

١- لاختبار معنوية الفروق بين أثر الأنواع المختلفة من البذور على انتاجية الفدان فإن :

$H_0 : \mu_١ = \mu_٢ = \mu_٣$

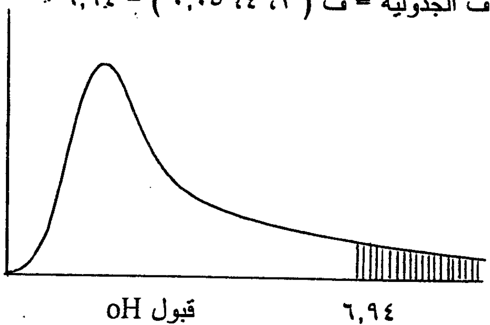
$H_1 : \mu_١ \neq \mu_٢ \neq \mu_٣$

من جدول تحليل التباين نجد أن :

قيمة ف المحسوبة = ف$_١$ = ٩,٧٥

من جدول توزيع ف نجد أن :

ف الجدولية = ف (٢، ٤، ٠,٠٥) = ٦,٩٤



وحيث أن قيمة ف المحسوبة> قيمة ف الجدولية، أى تقع فى منطقة رفض oH، لذلك نرفض الفرض العدمى ، oH، ونقبل الفرض البديل، H_1، والذى يقضى بوجود فروق معنوية بين متوسطات انتاجية الفدان بالمجتمع نتيجة اختلاف نوعية البذور المستخدمة.

٢- لاختيار معنوية الفروق بين أثر نظم الرى المختلفة على انتاجية الفدان، فإن :

$H_o : \acute{\mu}_1 = \acute{\mu}_2 = \acute{\mu}_3$

$H_1 : \acute{\mu}_1 \neq \acute{\mu}_2 \neq \acute{\mu}_3$

من جدول تحليل التباين نجد أن:

قيمة ف المحسوبة = ف٢ = ٠,٧٥

قيمة ف الجدولية = ف (٢، ٤، ٠,٠٥) = ٦,٩٤

وحيث أن قيمة فَ المحسوبة < قيمة ف الجدولية، أى تقع فى منطقة قبــول oH، لذلك نقبل الفرض العدمى oH والذى يقضى بعدم وجــود فــروق معنويــة بــين متوسطات انتاجية الفدان بالمجتمع نتيجة اختلاف نظم الرى المستخدمة.

٣-جيث أن اختبار ف أظهر وجود فروق معنوية بين متوسطات الإنتاجية راجعــة إلى نوعية البذور المستخدمة، لذا سوف يستخدم تحليل أقل فرق معنوى لتحليــل معنوية الفروق بين كل زوج من أنواع البذور المستخدمة كما يلى:

أقل فرق معنوى عند مستوى المعنوية ٥%

$$= \text{ت} \left[(\text{م} - \text{١}) (\text{ن-١}) \text{ ، } \frac{\alpha}{\text{٢}} \right] \times \sqrt{\text{ع}^{\text{٢}}_{\text{خ}} \left(\frac{\text{٢}}{\text{م}} \right)}$$

$$= \text{ت} (\text{٤، ٠,٠٢٥}) \times \sqrt{\text{٤} \times \frac{\text{٢}}{\text{٣}}}$$

$$= \text{٢,٧٧٦} \times \text{١,٦٣} = \text{٤,٥٢}$$

أقل فرق معنوى عند مستوى المعنوية ١ %

$$= \text{ت} (\text{٤، ٠,٠٠٥}) \times \sqrt{\text{٤} \times \frac{\text{٢}}{\text{٣}}}$$

$$= \text{٤,٦٠٤} \times \text{١,٦٣} = \text{٧,٥٠}$$

كما نلاحظ أن :

$$\bar{\text{س}}_{\text{١}} = \frac{\text{٢٤}}{\text{٣}} = \text{٨}$$

$$\bar{\text{س}}_{\text{٢}} = \frac{\text{١٨}}{\text{٣}} = \text{٦}$$

$$\bar{\text{س}}_{\text{٣}} = \frac{\text{٣٩}}{\text{٣}} = \text{١٣}$$

ويتم عمل جدول المقارنات على النحو التالى :

المقارنة	الفرق المطلق بين المتوسطات	أقل فرق معنوى عند :	
		%٥	%١
A ، B	$\|\bar{س}_1 - \bar{س}_2\| = \|٨ - ٦\| = ٢$	٤,٥٢	٧,٥
A ، C	$\|\bar{س}_1 - \bar{س}_3\| = \|٨ - ١٣\| = ٥$	٤,٥٢	٧,٥
B ، C	$\|\bar{س}_2 - \bar{س}_3\| = \|٦ - ١٣\| = ٧$	٤,٥٢	٧,٥

ويتضح من الجدول السابق أن :

لا يوجد فروق معنوى بين المعالجتين الأولى والثانية أى بين النوعين A ، B

يوجد فروق معنوى بين المعالجتين الأولى والثالثة أى بين النوعين A ، C

يوجد فروق معنوى بين المعالجتين الثانية والثالثة أى بين النوعين B ، C

ومن ثم فإن النوع الثالث من البذور وهو النوع الأكثر تميزاً ونوصى بتعميمه.

الجداول الإحصائية

جدول (١) : قيم دالـة الإحتمـال لمتغير ذات الحدين عند عدد معين من المحاولات ، ن، وقيم محددة لإحتمال النجاح، أ.

جدول (٢) : قيم دالة الإحتمال لمتغير بواسون عند قيم مختلفة للمعلمة λ.

جدول (٣) : لحساب المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعى المعيارى.

جدول (٤) : قيم ت مبوبـة تبعاً لدرجـات حريـة معينـة، ن، ومسـتويات معنوية مختلفة، α.

جدول (٥) : قيم ف مبوبـة تبعاً لدرجـات حريـة معينـة، ن، ولمسـتويى المعنوية ٥٪ ، ١٪.

جدول (٦) : قيم كا^{٢} مبوبـة تبعاً لدرجـات حريـة معينـة، ن، ومسـتويات معنوية مختلفة، α.

جدول (٧): قيم د لإختبار كولومجروف سيمنروف.

جدول (٨): الحدود الدنيا والعليا لإختبار الدورة.

جدول (٩): قيم ر مبوبة تبعاً لـ ن$_{١}$، ن$_{٢}$ ومستويات معنوية مختلفة.

جدول (١)

قيم دالة الاحتمال لمتغير ذات الحدين د(س) عند عدد معين من المحاولات ن وقيم محددة لاحتمال النجاح أ

عدد الحالات ن	المتغير س	احتمال النجاح أ ,٠٥	,١٠	,١٥	,٢٠	,٢٥	,٣٠	,٣٥	,٤٠	,٤٥	,٥٠
١	٠	,٩٥٠٠	,٩٠٠٠	,٨٥٠٠	,٨٠٠٠	,٧٥٠٠	,٧٠٠٠	,٦٥٠٠	,٦٠٠٠	,٥٥٠٠	,٥٠٠٠
	١	,٠٥٠٠	,١٠٠٠	,١٥٠٠	,٢٠٠٠	,٢٥٠٠	,٣٠٠٠	,٣٥٠٠	,٤٠٠٠	,٤٥٠٠	,٥٠٠٠
٢	٠	,٩٠٢٥	,٨١٠٠	,٧٢٢٥	,٦٤٠٠	,٥٦٢٥	,٤٩٠٠	,٤٢٢٥	,٣٦٠٠	,٣٠٢٥	,٢٥٠٠
	١	,٠٩٥٠	,١٨٠٠	,٢٥٥٠	,٣٢٠٠	,٣٧٥٠	,٤٢٠٠	,٤٥٥٠	٤٨٠٠,	,٤٩٥٠	,٥٠٠٠
	٢	,٠٠٢٥	,٠١٠٠	,٠٢٢٥	,٠٤٠٠	,٠٦٢٥	,٠٩٠٠	,١٢٢٥	,١٦٠٠	,٢٠٢٥	,٢٥٠٠
٣	٠	,٨٥٧٤	,٧٢٩٠	,٦١٤١	,٥١٢٠	,٤٢١٦	,٣٤٣٠	,٢٧٤٦	,٢١٦٠	,١٦٦٤	,١٢٥٠
	١	,١٣٥٤	,٢٤٣٠	,٣٢٥١	,٣٨٤٠	,٤٢١٩	,٤٤١٠	,٤٤٣٦	,٤٣٢٠	,٤٠٨٤	,٣٧٥٠
	٢	,٠٠٧١	,٠٢٧٠	,٠٥٧٤	,٠٩٦٠	,١٤٠٦	,١٨٩٠	,٢٣٩٨	,٢٨٨٠	,٣٣٤١	,٣٧٥٠
	٣	,٠٠٠١	,٠٠١٠	,٠٠٣٤	,٠٠٨٠	,٠١٥٦	,٠٢٧٠	,٠٤٢٩	,٠٦٤٠	,٠٩١١	,١٢٥٠
٤	٠	,٨١٤٥	,٦٥٦١	,٥٢٢٠	,٤٠٩٦	,٣١٦٤	,٢٤٠١	,١٧٨٥	,١٢٩٦	,٠٩١٥	,٠٦٢٥
	١	,١٧١٥	,٢٩١٦	,٣٦٨٥	,٤٠٩٦	,٤٢١٩	,٤١١٦	,٣٨٤٥	,٣٤٥٦	,٢٩٩٥	,٢٥٠٠
	٢	,٠١٣٥	,٠٤٨٦	,٠٩٧٥	,١٥٣٦	,٢١٠٩	,٢٦٤٦	,٣١٠٥	,٣٤٥٦	,٣٦٧٥	,٣٧٥٠
	٣	,٠٠٠٥	,٠٠٣٦	,٠١١٥	,٠٢٥٦	,٠٤٦٩	,٠٧٥٦	,١١١٥	,١٥٣٦	,٢٠٠٥	,٢٥٠٠
	٤	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٥	,٠٠١٦	,٠٠٣٩	,٠٠٨١	,٠١٥٠	,٠٢٥٦	,٠٤١٠	,٠٦٢٥

تابع جدول (١)

عدد الحالات ن	المتغير س / معدل النجاح أ	,٠٥	,١٠	,١٥	,٢٠	,٢٥	,٣٠	,٣٥	,٤٠	,٤٥	,٥٠
٥	٠	,٧٧٣٨	,٥٩٠٥	,٤٤٣٧	,٣٢٧٧	,٢٣٧٣	,١٦٨١	,١١٦٠	,٠٧٧٨	,٠٥٠٣	,٠٣١٢
	١	,٢٠٣٦	,٣٢٨٠	,٣٩١٥	,٤٠٩٦	,٣٩٥٥	,٣٦٠٢	,٣١٢٤	,٢٥٩٢	,٢٠٥٩	,١٥٦٢
	٢	,٠٢١٤	,٠٧٢٩	,١٣٨٢	,٢٠٤٨	,٢٦٣٧	,٣٠٨٧	,٣٣٦٤	,٣٤٥٦	,٣٣٦٩	,٣١٢٥
	٣	,٠٠١١	,٠٠٨١	,٠٢٤٤	,٠٥١٢	,٠٨٧٩	,١٣٢٣	,١٨١١	,٢٣٠٤	,٢٧٥٧	,٣١٢٥
	٤	,٠٠٠٠	,٠٠٠٤	,٠٠٢٢	,٠٠٦٤	,٠١٤٦	,٠٢٨٤	,٠٤٨٨	,٠٧٦٨	,١١٢٨	,١٥٦٢
	٥	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٣	,٠٠١٠	,٠٠٢٤	,٠٠٥٣	,٠١٠٢	,٠١٨٥	,٠٣١٢
٦	٠	,٧٣٥١	,٥٣١٤	,٣٧٧١	,٢٦٢١	,١٧٨٠	,١١٧٦	,٠٧٥٤	,٠٤٦٧	,٠٢٧٧	,٠١٥٦
	١	,٢٣٢١	,٣٥٤٣	,٣٩٩٣	,٣٩٣٢	,٣٥٦٠	,٣٠٢٥	,٢٤٣٧	,١٤٦٦	,١٣٥٩	,٠٩٣٨
	٢	,٠٣٠٥	,٠٩٨٤	,١٧٦٢	,٢٤٥٨	,٢٩٦٦	,٣٢٤١	,٣٢٨٠	,٤١١٠	,٢٧٨٠	,٢٣٤٤
	٣	,٠٠٢١	,٠١٤٦	,٠٤١٥	,٠٨١٩	,١٣١٨	,١٨٥٢	,٢٣٥٥	,٢٧٦٥	,٣٠٣٢	,٣١٢٥
	٤	,٠٠٠١	,٠٠١٢	,٠٠٥٥	,٠١٥٤	,٠٣٣٠	,٠٥٩٥	,٠٩٥١	,١٣٨٢	,١٨٦١	,٢٣٤٤
	٥	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٤	,٠٠١٥	,٠٠٤٤	,٠١٠٢	,٠٢٠٥	,٠٣٦٩	,٠٦٠٩	,٠٩٣٨
	٦	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٢	,٠٠٠٧	,٠٠١٨	,٠٠٤١	,٠٠٨٣	,٠١٥٦
٧	٠	,٦٩٨٣	,٤٧٨٣	,٣٢٠٦	,٢٠٩٧	,١٣٣٥	,٠٨٢٤	,٠٤٩٠	,٠٢٨٠	,٠١٥٢	,٠٠٧٨
	١	,٢٥٧٣	,٣٧٢٠	,٣٩٦٠	,٣٦٧٠	,٣١١٥	,٢٤٧١	,١٣٤٨	,١٣٠٦	,٠٨٧٢	,٠٥٤٧
	٢	,٠٤٠٦	,١٢٤٠	,٢٠٩٧	,٢٧٥٣	,٣١١٥	,٣١٧٧	,٢٩٨٥	,٢٦١٣	,٢١٧٠	,١٦٤١
	٣	,٠٠٣٦	,٠٢٣٠	,٠٦١٧	,١١٤٧	,١٧٣٠	,٢٢٦٩	,٢٦٧٩	,٢٩٠٣	,٢٩١٨	,٢٧٣٤
	٤	,٠٠٠٢	,٠٠٢٦	,٠١٠٩	,٠٢٨٧	,٠٥٧٧	,٠٩٧٢	,١٤٤٢	,١٩٣٥	,٢٣٨٨	,٢٧٣٤
	٥	,٠٠٠٠	,٠٠٠٢	,٠٠١٢	,٠٠٤٣	,٠١١٥	,٠٢٥٠	,٠٤٦٦	,٠٧٧٤	,١١٧٢	,١٦٤١
	٦	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٤	,٠٠١٣	,٠٠٣٦	,٠٠٨٤	,٠١٧٢	,٠٣٢٠	,٠٥٤٧
	٧	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٢	,٠٠٠٦	,٠٠١٦	,٠٠٣٧	,٠٠٧٨

تابع جدول (١)

عدد الحالات ن	المتغير س	احتمال النجاح أ ,٠٥	,١٠	,١٥	,٢٠	,٢٥	,٣٠	,٣٥	,٤٠	,٤٥	,٥٠
٨	٠	,٦٦٣٤	,٤٣٠٥	,٢٧٢٥	,١٦٧٨	,١٠٠١	,٠٥٧٦	,٠٣١٩	,٠١٦٨	,٠٠٨٤	,٠٠٣٩
	١	,٢٧٩٣	,٣٨٢٦	,٣٨٤٧	,٣٣٥٥	,٢٦٧٠	,١٩٧٧	,١٣٧٣	,٠٨٦٩	,٠٥٤٨	,٠٣١٢
	٢	,٠٥١٥	,١٤٨٨	,٢٣٧٦	,٢٩٣٦	,٣١١٥	,٢٩٦٥	,٢٥٨٧	,٢٠٩٠	,١٥٩٦	,١٠٩٤
	٣	,٠٠٥٤	,٠٣٣١	,٠٨٣٩	,١٤٦٨	,٢٠٧٦	,٢٥٤١	,٢٧٨٦	,٢٧٨٧	,٢٥٦٨	,٢١٨٨
	٤	,٠٠٠٤	,٠٠٤٦	,٠١٨٥	,٠٤٥٩	,٠٨٦٥	,١٣٦١	,١٨٧٥	,٢٣٢٢	,٢٦٢٧	,٢٧٣٤
	٥	,٠٠٠٠	,٠٠٠٤	,٠٠٢٦	,٠٠٩٢	,٠٢٣١	,٠٤٦٧	,٠٨٠٨	,١٢٣٩	,١٧١٩	,٢١٨٨
	٦	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٢	,٠٠١١	,٠٠٣٨	,٠١٠٠	,٠٢١٧	,٠٤١٣	,٠٧٠٣	,١٠٩٤
	٧	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٤	,٠٠١٢	,٠٠٣٣	,٠٠٧٩	,٠١٦٤	,٠٣١٢
	٨	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٢	,٠٠٠٧	,٠٠١٧	,٠٠٣٩
٩	٠	,٦٣٠٢	,٣٨٧٤	,٢٣١٦	,١٣٤٢	,٠٧٥١	,٠٤٠٤	,٠٢٠٧	,٠١٠١	,٠٠٤٦	,٠٠٢٠
	١	,٢٩٨٥	,٣٨٧٤	,٣٦٧٩	,٣٠٢٠	,٢٢٥٣	,١٥٥٦	,١٠٠٤	,٠٦٠٥	,٠٣٣٩	,٠١٧٦
	٢	,٠٦٢٩	,١٧٢٢	,٢٥٩٧	,٣٠٢٠	,٣٠٠٣	,٢٦٦٨	,٢١٦٢	,١٦١٢	,١١١٠	,٠٧٠٣
	٣	,٠٠٧٧	,٠٤٤٦	,١٠٦٩	,١٧٦٢	,٢٣٣٦	,٢٦٦٨	,٢٧١٦	,٢٥٠٨	,٢١١٩	,١٦٤١
	٤	,٠٠٠٦	,٠٠٧٤	,٠٢٨٣	,٠٦٦١	,١١٦٨	,١٧١٥	,٢١٩٤	,٢٥٠٨	,٢٦٠٠	,٢٤٦١
	٥	,٠٠٠٠	,٠٠٠٨	,٠٠٥٠	,٠١٦٥	,٠٣٨٦	,٠٧٣٥	,١١٨١	,١٦٧٢	,٢١٢٨	,٢٤٦١
	٦	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٦	,٠٠٢٨	,٠٠٨٧	,٠٢١٠	,٠٤٢٤	,٠٧٤٣	,١١٦٠	,١٦٤١
	٧	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٣	,٠٠١٢	,٠٠٣٩	,٠٠٩٨	,٠٢١٢	,٠٤٠٧	,٠٧٠٣
	٨	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٤	,٠٠١٣	,٠٠٣٥	,٠٠٨٣	,٠١٧٦
	٩	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٣	,٠٠٠٨	,٠٠٢٠

تابع جدول (١)

ن	س (عدد الحالات ، المتغير) \ احتمال النجاح أ	,٠٥	,١٠	,١٥	,٢٠	,٢٥	,٣٠	,٣٥	,٤٠	,٤٥	,٥٠
٢٠	٠	,٣٥٨٥	,١٢١٦	,٠٣٨٨	,٠١١٥	,٠٠٣٢	,٠٠٠٨	,٠٠٠٢	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠
	١	,٣٧٧٤	,٢٧٠٢	,١٣٦٨	,٠٥٧٦	,٠٢١١	,٠٠٦٨	,٠٠٢٠	,٠٠٠٥	,٠٠٠١	,٠٠٠٠
	٢	,١٨٨٧	,٢٨٥٢	,٢٢٩٣	,١٣٦٩	,٠٦٦٩	,٠٢٧٨	,٠١٠٠	,٠٠٣١	,٠٠٠٨	,٠٠٠٢
	٣	,٠٥٩٦	,١٩٠١	,٢٤٢٨	,٢٠٥٤	,١٣٣٩	,٠٧١٦	,٠٣٢٣	,٠١٢٣	,٠٠٤٠	,٠٠١١
	٤	,٠١٣٣	,٠٨٩٨	,١٨٢١	,٢١٨٢	,١٨٩٧	,١٣٠٤	,٠٧٣٨	,٠٣٥٠	,٠١٣٩	,٠٠٤٦
	٥	,٠٠٢٢	,٠٣١٩	,١٠٢٨	,١٧٤٦	,٢٠٢٣	,١٧٩٨	,١٢٧٢	,٠٧٤٦	,٠٣٦٥	,٠١٤٨
	٦	,٠٠٠٣	,٠٠٨٩	,٠٤٥٤	,١٠٩١	,١٦٨٦	,١٩١٦	,١٧١٢	,١٢٤٤	,٠٧٤٦	,٠٣٧٠
	٧	,٠٠٠٠	,٠٠٢٠	,٠١٦٠	,٠٥٤٥	,١١٢٤	,١٦٤٣	,١٨٤٤	,١٦٥٩	,١٢٢١	,٠٧٣٩
	٨		,٠٠٠٤	,٠٠٤٦	,٠٢٢٢	,٠٦٠٩	,١١٤٤	,١٦١٤	,١٧٩٧	,١٦٢٣	,١٢٠١
	٩		,٠٠٠١	,٠٠١١	,٠٠٧٤	,٠٢٧١	,٠٦٥٤	,١١٥٨	,١٥٩٧	,١٧٧١	,١٦٠٢
	١٠		,٠٠٠٠	,٠٠٠٢	,٠٠٢٠	,٠٠٩٩	,٠٣٠٨	,٠٦٨٦	,١١٧١	,١٥٩٣	,١٧٦٢
	١١			,٠٠٠٠	,٠٠٠٥	,٠٠٣٠	,٠١٢٠	,٠٣٣٦	,٠٧١٠	,١١٨٥	,,١٦٠٦
	١٢				,٠٠٠١	,٠٠٠٨	,٠٠٣٩	,٠١٣٦	,٠٣٥٥	,٠٧٢٧	,١٢٠١
	١٣				,٠٠٠٠	,٠٠٠٢	,٠٠١٠	,٠٠٤٥	,٠١٤٦	,٠٣٦٦	,٠٧٣٩
	١٤					,٠٠٠٠	,٠٠٠٢	,٠٠١٢	,٠٠٤٩	,٠١٥٠	,٠٣٧٠
	١٥						,٠٠٠٠	,٠٠٠٣	,٠٠١٣	,٠٠٤٩	,٠١٤٨
	١٦							,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠١٣	,٠٠٤٦
	١٧									,٠٠٠٢	,٠٠١١
	١٨									,٠٠٠٠	,٠٠٠٢
	١٩										,٠٠٠٠
	٢٠										,٠٠٠٠

جدول (٢)

قيم دالة الاحتمال لمتغير بواسون د(س) قيم مختلفة للمعلمه λ

س \ λ	,١	,٢	,٣	,٤	,٥	,٦	,٧	,٨	,٩	١,٠
٠	,٩٠٤٩	,٨١٨٧	,٧٤٠٨	,٦٧٠٣	,٦٠٦٥	,٥٤٨٨	,٤٩٦٦	,٤٤٩٣	,٤٠٦٦	,٣٦٧٩
١	,٠٩٠٥	,١٦٣٧	,٢٢٢٢	,٢٦٨١	,٣٠٣٣	,٣٢٩٣	,٣٤٧٦	,٣٥٩٥	,٣٦٥٩	,٣٦٧٩
٢	,٠٠٤٥	,٠١٦٤	,٠٣٣٣	,٠٥٣٦	,٠٧٥٨	,٠٩٨٨	,١٢١٧	,١٤٣٨	,١٦٤٧	,١٨٣٩
٣	,٠٠٠٢	,٠٠١١	,٠٠٣٣	,٠٠٧٢	,٠١٢٦	,٠١٩٨	,٠٢٨٤	,٠٣٨٣	,٠٤٩٤	,٠٦١٣
٤	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٢	,٠٠٠٧	,٠٠١٦	,٠٠٣٠	,٠٠٥٠	,٠٠٧٧	,٠١١١	,٠١٥٣
٥	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٢	,٠٠٠٤	,٠٠٠٧	,٠٠١٢	,٠٠٢٠	,٠٠٣١
٦	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٢	,٠٠٠٣	,٠٠٠٥
٧	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠١

تابع جدول (٢)

س λ	١,١	١,٢	١,٣	١,٤	١,٥	١,٦	١,٧	١,٨	١,٩	٢,٠
٠	,٣٣٢٩	,٣٠١٢	,٢٧٢٥	,٢٤٦٦	,٢٢٣١	,٢٠١٩	,١٨٢٧	,١٦٥٣	,١٤٩٦	,١٣٥٣
١	,٣٦٦٢	,٣٦١٤	,٣٥٤٣	,٣٤٥٢	,٣٣٤٧	,٣٢٣٠	,٣١٠٦	,٢٩٧٥	,٢٨٤٢	,٢٧٠٧
٢	,٢٠١٤	,٢١٦٩	,٢٣٠٣	,٢٤١٧	,٢٥١٠	,٢٥٨٤	,٢٦٤٠	,٢٦٧٨	,٢٧٠٠	,٢٧٠٧
٣	,٠٧٣٨	,٠٨٦٧	,٠٩٩٨	,١١٢٨	,١٢٥٥	,١٣٧٨	,١٤٩٦	,١٦٠٧	,١٧١٠	,١٨٠٤
٤	,٠٢٠٣	,٠٢٦٠	,٠٣٢٤	,٠٣٩٥	,٠٤٧١	,٠٥٥١	,٠٦٣٦	,٠٧٢٣	,٠٨١٢	,٠٩٠٢
٥	,٠٠٤٥	,٠٠٦٢	,٠٠٨٤	,٠١١١	,٠١٤١	,٠١٧٦	,٠٢١٦	,٠٢٦٠	,٠٣٠٩	,٠٣٦١
٦	,٠٠٠٨	,٠٠١٢	,٠٠١٨	,٠٠٢٦	,٠٠٣٥	,٠٠٤٧	,٠٠٦١	,٠٠٧٨	,٠٠٩٨	,٠١٢٠
٧	,٠٠٠١	,٠٠٠٢	,٠٠٠٣	,٠٠٠٥	,٠٠٠٨	,٠٠١١	,٠٠١٥	,٠٠٢٠	,٠٠٢٧	,٠٠٣٤
٨	,٠٠٠١	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠١	,٠٠٠١	,٠٠٠٢	,٠٠٠٣	,٠٠٠٥	,٠٠٠٦	,٠٠٠٩
٩		,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠١	,٠٠٠١	,٠٠٠٢

تابع جدول (٢)

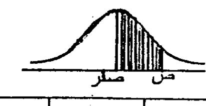
س \ λ	٢,١	٢,٢	٢,٣	٢,٤	٢,٥	٢,٦	٢,٧	٢,٨	٢,٩	٣,٠
٠	,١٢٢٥	,١١٠٨	,١٠٠٣	,٠٩٠٧	,٠٨٢١	,٠٧٤٣	,٠٦٧٢	,٠٦٠٨	,٠٥٥٠	,٠٤٩٨
١	,٢٥٧٢	,٢٤٣٨	,٢٣٠٦	,٢١٧٧	,٢٠٥٢	,١٩٣١	,١٨١٥	,١٧٠٣	,١٥٩٦	,١٤٩٤
٢	,٢٧٠٠	,٢٦٨١	,٢٦٥٢	,٢٦١٣	,٢٥٦٥	,٢٥١٠	,٢٤٥٠	,٢٣٨٤	,٢٣١٤	,٢٢٤٠
٣	,١٨٩٠	,١٩٦٦	,٢٠٣٣	,٢٠٩٠	,٢١٣٨	,٢١٧٦	,٢٢٠٥	,٢٢٢٥	,٢٢٣٧	,٢٢٤٠
٤	,٠٩٩٢	,١٠٨٢	,١١٦٩	,١٢٥٤	,١٣٣٦	,١٤١٤	,١٤٨٨	,١٥٥٧	,١٦٢٢	,١٦٨٠
٥	,٠٤١٧	,٠٤٧٦	,٠٥٣٨	,٠٦٠٢	,٠٦٦٨	,٠٧٣٥	,٠٨٠٤	,٠٨٧٢	,٠٩٤٠	,١٠٠٨
٦	,٠١٤٦	,٠١٧٤	,٠٢٠٦	,٠٢٤١	,٠٦٦٨	,٠٣١٩	,٠٣٦٢	,٠٤٠٧	,٠٤٥٥	,١٠٠٤
٧	,٠٠٤٤	,٠٠٥٥	,٠٠٦٨	,٠٠٨٣	,٠٢٧٨	,٠١١٨	,٠١٣٩	,٠١٦٣	,٠١٨٨	,٠٥٠٤
٨	,٠٠١١	,٠٠١٥	,٠٠١٩	,٠٠٢٥	,٠٠٩٩	,٠٠٣٨	,٠٠٤٧	,٠٠٥٧	,٠٠٦٨	,٠٢١٦
٩	,٠٠٠٣	,٠٠٠٤	,٠٠٠٥	,٠٠٠٧	,٠٠٣١	,٠٠١١	,٠٠١٤	,٠٠١٨	,٠٠٦٢	,٠٠٨١
١٠	,٠٠٠١	,٠٠٠١	,٠٠٠١	,٠٠٠٢	,٠٠٠٩	,٠٠٠٣	,٠٠٠٤	,٠٠٠٥	,٠٠٠٦	,٠٠٢٧
١١	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٢	,٠٠٠١	,٠٠٠١	,٠٠٠١	,٠٠٠٢	,٠٠٠٨
١٢	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠٢
١٣										,٠٠٠١

تابع جدول (٢)

س \ λ	٣,٥	٤,٠	٤,٥	٥,٠	٥,٥	٦,٠	٦,٥	٧,٠	٧,٥	٨,٠
١	,٠٣٠٢	,٠١٨٣	,٠١١١	,٠٠٦٧	,٠٠٤١	,٠٠٢٥	,٠٠١٥	,٠٠٠٩	,٠٠٠٦	,٠٠٠٣
٢	,١٠٥٧	,٠٧٣٣	,٠٥٠٠	,٠٣٣٧	,٠٢٢٥	,٠١٤٩	,٠٠٩٨	,٠٠٦٤	,٠٠٤١	,٠٠٢٧
٣	,١٨٥٠	,١٤٦٥	,١١٢٥	,٠٨٤٢	,٠٦١٨	,٠٤٤٦	,٠٣١٨	,٠٢٢٣	,٠١٥٦	,٠١٠٧
٤	,٢١٥٨	,١٩٥٤	,١٦٤٧	,١٤٠٤	,١١٣٣	,٠٨٩٢	,٠٦٨٨	,٠٥٢١	,٠٣٨٩	,٠٢٨٦
٥	,١٨٨٨	,١٩٥٤	,١٨٩٨	,١٧٥٥	,١٥٥٨	,١٣٣٩	,١١١٨	,٠٩١٢	,٠٧٢٩	,٠٥٧٣
٦	,١٣٢٢	,١٥٦٣	,١٧٠٨	,١٧٥٥	,١٧١٤	,١٦٠٦	,١٤٥٤	,١٢٧٧	,١٠٩٤	,٠٩١٦
٧	,٠٧٧١	,١٠٤٢	,١٢٨١	,١٤٦٢	,١٥٧١	,١٦٠٦	,١٥٧٥	,١٤٩٠	,١٣٦٧	,١٢٢١
٨	,٠٣٨٥	,٠٥٩٥	,٠٨٢٤	,١٠٤٤	,١٢٣٤	,١٣٧٧	,١٤٦٢	,١٤٩٠	,١٤٦٥	,١٣٩٦
٩	,٠٣٨٥	,٠٢٩٨	,٠٤٦٣	,٠٦٥٣	,٠٨٤٩	,١٠٣٣	,١١٨٨	,١٣٠٤	,١٣٧٣	,١٢٤١
١٠	,٠١٦٩	,٠١٣٢	,٠٢٣٢	,٠٣٦٣	,٠٥١٩	,٠٦٨٨	,٠٨٥٨	,١٠١٤	,١١٤٤	,٠٩٣٣
١١	,٠٠٦٦	,٠٠٥٣	,٠١٠٤	,٠١٨١	,٠٢٨٥	,٠٤١٣	,٠٥٨٨	,٠٧١٠	,٠٨٥٨	,٠٧٢٢
١٢	,٠٠٢٣	,٠٠١٩	,٠٠٤٣	,٠٠٨٢	,٠١٤٣	,٠٢٢٥	,٠٣٣٠	,٠٤٥٢	,٠٥٨٥	,٠٤٨١
١٣	,٠٠٠٧	,٠٠٠٦	,٠٠١٦	,٠٠٣٤	,٠٠٦٥	,٠١١٣	,٠١٧٩	,٠٢٦٤	,٠٣٦٦	,٠٢٩٦
١٤	,٠٠٠٢	,٠٠٠٢	,٠٠٠٦	,٠٠١٣	,٠٠٢٨	,٠٠٥٢	,٠٠٨٩	,٠١٤٢	,٠٢١١	,٠١٦٩
١٥	,٠٠٠١	,٠٠٠١	,٠٠٠٢	,٠٠٠٥	,٠٠١١	,٠٠٢٢	,٠٠٤١	,٠٠٧١	,٠١١٣	,٠٠٩٠
١٦	,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٢	,٠٠٠٤	,٠٠٠٩	,٠٠١٨	,٠٠٣٣	,٠٠٥٧	,٠٠٤٥
١٧			,٠٠٠٠	,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٣	,٠٠٠٧	,٠٠١٤	,٠٠٢٦	,٠٠٢١
١٨					,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٣	,٠٠٠٦	,٠٠١٢	,٠٠٠٩
١٩						,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٢	,٠٠٠٥	,٠٠٠٤
٢٠							,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠٢	,٠٠٠٢
٢١								,٠٠٠٠	,٠٠٠١	,٠٠٠١
٢٢									,٠٠٠٠	,٠٠٠٠

جدول (٣)

التوزيع الطبيعى المعيارى: يعطى الجدول المساحة المظللة والمحصورة بين صفر ، ص



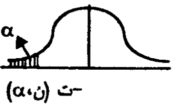
ص	,٠٠	,٠١	,٠٢	,٠٣	,٠٤	,٠٥	,٠٦	,٠٧	,٠٨	,٠٩
,٠	,٠٠٠٠	,٠٠٤٠	,٠٠٨٠	,٠١٢٠	,٠١٦٠	,٠١٩٩	,٠٢٣٩	,٠٢٧٩	,٠٣١٩	,٠٣٥٩
,١	,٠٣٨٩	,٠٤٣٨	,٠٤٧٨	,٠٥١٧	,٠٥٥٧	,٠٥٩٦	,٠٦٣٦	,٠٦٧٥	,٠٧١٤	,٠٧٥٣
,٢	,٠٧٩٣	,٠٨٣٢	,٠٨٧١	,٠٩١٠	,٠٩٤٨	,٠٩٨٧	,١٠٢٦	,١٠٦٤	,١١٠٣	,١١٤١
,٣	,١١٧٩	,١٢١٧	,١٢٥٥	,١٢٩٣	,١٣٣١	,١٣٦٨	,١٤٠٦	,١٤٤٣	,١٤٨٠	,١٥١٧
,٤	,١٥٥٤	,١٥٩١	,١٦٢٨	,١٦٦٤	,١٧٠٠	,١٧٣٦	,١٧٧٢	,١٨٠٨	,١٨٤٤	,١٨٧٩
,٥	,١٩١٥	,١٩٥٠	,١٩٨٥	,٢٠١٩	,٢٠٥٤	,٢٠٨٨	,٢١٢٣	,٢١٥٧	,٢١٩٠	,٢٢٢٤
,٦	,٢٢٥٧	,٢٢٩١	,٢٣٢٤	,٢٣٥٧	,٢٣٨٩	,٢٤٢٢	,٢٤٥٤	,٢٤٨٦	,٢٥١٨	,٢٥٤٩
,٧	,٢٥٨٠	,٢٦١٢	,٢٦٤٢	,٢٦٧٣	,٢٧٠٤	,٢٧٣٤	,٢٧٦٤	,٢٧٩٤	,٢٨٢٣	,٢٨٥٢
,٨	,٢٨٨١	,٢٩١٠	,٢٩٣٩	,٢٩٦٧	,٢٩٩٥	,٣٠٢٣	,٣٠٥١	,٣٠٧٨	,٢١٠٦	,٣١٣٣
,٩	,٣١٥٩	,٣١٨٦	,٣٢١٢	,٣٢٣٨	,٣٢٦٤	,٣٢٨٩	,٣٣١٥	,٣٣٤٠	,٣٣٦٥	,٣٣٨٩
١,٠	,٣٤١٣	,٣٤٣٨	,٣٤٦١	,٣٤٨٥	,٣٥٠٨	,٣٥٣١	,٣٥٥٤	,٣٥٧٧	,٣٥٩٩	,٣٦٢١
١,١	,٣٦٤٣	,٣٦٦٥	,٣٦٨٦	,٣٧٠٨	,٣٧٢٩	,٣٧٤٩	,٣٧٧٠	,٣٧٩٠	,٣٨١٠	,٣٨٣٠
١,٢	,٣٨٤٩	,٣٨٦٩	,٣٨٨٨	,٣٩٠٧	,٣٩٢٥	,٣٩٤٤	,٣٩٦٢	,٣٩٨٠	,٣٩٩٧	,٤٠١٥
١,٣	,٤٠٣٢	,٤٠٤٩	,٤٠٦٦	,٤٠٨٢	,٤٠٩٩	,٤١١٥	,٤١٣١	,٤١٤٧	,٤١٦٢	,٤١٧٧

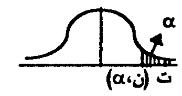
تابع جدول (٣)

ص	,٠٠	,٠١	,٠٢	,٠٣	,٠٤	,٠٥	,٠٦	,٠٧	,٠٨	,٠٩
١,٤	,٤١٩٢	,٤٢٠٧	,٤٢٢٢	,٤٢٣٦	,٤٢٥١	,٤٢٦٥	,٤٢٧٩	,٤٢٩٢	,٤٣٠٦	,٤٣١٩
١,٥	,٤٣٣٢	,٤٣٤٥	,٤٣٥٧	,٤٣٧٠	,٤٣٨٢	,٤٣٩٤	,٤٤٠٦	,٤٤١٨	,٤٤٢٩	,٤٤٤١
١,٦	,٤٤٥٢	,٤٤٦٣	,٤٤٧٤	,٤٤٨٤	,٤٤٩٥	,٥٤٠٥	,٤٥١٥	,٤٥٢٥	,٤٥٣٥	,٤٥٤٥
١,٧	,٤٥٥٤	,٤٥٦٤	,٤٥٧٣	,٤٥٨٢	,٤٥٩١	,٤٥٩٩	,٤٦٠٨	,٤٦١٦	,٤٦٢٥	,٤٦٣٣
١,٨	,٤٦٤١	,٤٦٤٩	,٤٦٥٦	,٤٦٦٤	,٤٦٧١	,٤٦٧٨	,٤٦٨٦	,٤٦٩٣	,٤٦٩٩	,٤٧٠٩
١,٩	,٤٧١٣	,٤٧١٩	,٤٧٢٦	,٤٧٣٢	,٤٧٣٨	,٤٧٤٤	,٤٧٥٠	,٤٧٥٦	,٤٧٦١	,٤٧٦٧
٢,٠	,٤٧٧٢	,٤٧٧٨	,٤٧٨٣	,٤٧٨٨	,٤٧٩٣	,٤٧٩٨	,٤٨٠٣	,٤٨٠٨	,٤٨١٢	,٤٨١٧
٢,١	,٤٨٢١	,٤٨٢٦	,٤٨٣٠	,٤٨٣٤	,٤٨٣٨	,٤٨٤٢	,٤٨٤٦	,٤٨٥٠	,٤٨٥٤	,٤٨٥٧
٢,٢	,٤٨٦١	,٤٨٦٤	,٤٨٦٨	,٤٨٧١	,٤٨٧٥	,٤٨٧٨	,٤٨٨١	,٤٨٨٤	,٤٨٨٧	,٤٨٩٠
٢,٣	,٤٨٩٣	,٤٨٩٦	,٤٨٩٨	,٣٩٠١	,٤٩٠٤	,٤٩٠٦	,٤٩٠٩	,٤٩١١	,٤٩١٣	,٤٩١٦
٢,٤	,٤٩١٨	,٤٩٢٠	,٤٩٢٢	,٤٩٢٥	,٤٩٢٧	,٤٩٢٩	,٤٩٣١	,٤٩٣٢	,٤٩٣٤	,٤٩٣٦
٢,٥	,٤٩٣٨	,٤٩٤٠	,٤٩٤١	,٤٩٤٣	,٤٩٣٥	,٤٩٤٦	,٣٩٤٨	,٤٩٤٩	,٤٩٥١	,٤٩٥٢
٢,٦	,٤٩٥٣	,٤٩٥٥	,٤٩٥٦	,٤٩٥٧	,٤٩٥٩	,٤٩٦٠	,٤٩٦١	,٤٩٦٢	,٤٩٦٣	,٤٩٦٤
٢,٧	,٤٩٦٥	,٤٩٦٦	,٤٩٦٧	,٤٩٦٨	,٤٩٦٩	,٤٩٧٠	,٤٩٧١	,٤٩٧٢	,٤٩٧٣	,٤٩٧٤
٢,٨	,٤٩٧٤	,٤٩٧٥	,٤٩٧٦	,٤٩٧٧	,٤٩٧٧	,٤٩٧٨	,٤٩٧٩	,٤٩٧٩	,٤٩٨١	,٤٩٨١
٢,٩	,٤٩٨١	,٤٩٨٢	,٤٩٨٢	,٤٩٨٣	,٤٩٨٤	,٤٩٨٤	,٤٩٨٥	,٤٩٨٥	,٤٩٨٦	,٤٩٨٦
٣,٠	,٤٩٨٦	,٤٩٨٧	,٤٩٨٧	,٤٩٨٨	,٤٩٨٨	,٤٩٨٩	,٤٩٨٩	,٤٩٨٩	,٤٩٩٠	,٤٩٩٠
٣,١	,٤٩٩٠	,٤٩٩١	,٤٩٩١	,٤٩٩١	,٤٩٩٢	,٤٩٩٢	,٤٩٩٢	,٤٩٩٢	,٤٩٩٣	,٤٩٩٣
٣,٢	,٤٩٩٣	,٤٩٩٣	,٤٩٩٤	,٤٩٩٤	,٤٩٩٤	,٤٩٩٤	,٤٩٩٤	,٤٩٩٥	,٤٩٩٥	,٤٩٩٥
٣,٣	,٤٩٩٥	,٤٩٩٥	,٤٩٩٥	,٤٩٩٦	,٤٩٩٦	,٤٩٩٦	,٤٩٩٦	,٤٩٩٦	,٤٩٩٦	,٤٩٩٧
٣,٤	,٤٩٩٧	,٤٩٩٧	,٤٩٩٧	,٤٩٩٧	,٤٩٩٧	,٤٩٩٧	,٤٩٩٧	,٤٩٩٧	,٤٩٩٧	,٤٩٩٨

جدول (٤)

توزيع ستيودنت (ت): يعطى الجدول قيمة ت التى تكون المساحة المظللة بعدها أو قبلها مساوية α عندما تكون درجات الحرية ن.





ن / α	٠٫٠٥	٠٫٠٢٥	٠٫٠١	٠٫٠٠٥	ن /	٠٫٠٥	٠٫٠٢٥	٠٫٠١	٠٫٠٠٥
١	٦٫٣١٣٧٤٩	١٢٫٧٠٦١٥	٣١٫٨٢٠٩٦	٦٣٫٦٥٥٩	٢١	١٫٧٢٠٧٤٤	٢٫٠٧٩٦١٤	٢٫٥١٧٦٤٥	٢٫٨٣١٣٦٦
٢	٢٫٩١٩٩٨٧	٤٫٣٠٢٦٥٦	٦٫٩٦٤٥٤٧	٩٫٩٢٤٩٨٨	٢٢	١٫٧١٧١٤٤	٢٫٠٧٣٨٧٥	٢٫٥٠٨٣٢٣	٢٫٨١٨٧٦١
٣	٢٫٣٥٣٣٦٣	٣٫١٨٢٤٤٩	٤٫٥٤٠٧٠٧	٥٫٨٤٠٨٤٨	٢٣	١٫٧١٣٨٧	٢٫٠٦٨٦٥٥	٢٫٤٩٩٨٧٤	٢٫٨٠٧٣٣٧
٤	٢٫١٣١٨٤٦	٢٫٧٧٦٤٥١	٣٫٧٤٦٩٣٦	٤٫٦٠٤٠٨	٢٤	١٫٧١٠٨٨٢	٢٫٠٦٣٨٩٨	٢٫٤٩٢١٦١	٢٫٧٩٦٩٥١
٥	٢٫٠١٥٠٤٩	٢٫٥٧٠٥٧٨	٣٫٣٦٤٩٣	٤٫٠٣٢١١٧	٢٥	١٫٧٠٨١٤	٢٫٠٥٩٥٣٧	٢٫٤٨٥١٠٣	٢٫٧٨٧٤٣٨
٦	١٫٩٤٣١٨١	٢٫٤٤٦٩١٤	٣٫١٤٣٦٦٨	٣٫٧٠٧٤٢٨	٢٦	١٫٧٠٥٦١٦	٢٫٠٥٥٥٣١	٢٫٤٧٨٦٣٨	٢٫٧٧٨٧٢٥
٧	١٫٨٩٤٥٧٨	٢٫٣٦٤٦٢٣	٢٫٩٩٧٩٤٩	٣٫٤٩٩٤٨١	٢٧	١٫٧٠٣٢٨٨	٢٫٠٥١٨٣٩	٢٫٤٧٢٦٦١	٢٫٧٧٠٦٨٥
٨	١٫٨٥٩٥٤٨	٢٫٣٠٦٠٠٦	٢٫٨٩٦٤٦٨	٣٫٣٥٥٣٨١	٢٨	١٫٧٠١١٣	٢٫٠٤٨٤٠٩	٢٫٤٦٧١٤١	٢٫٧٦٣٣٦٣
٩	١٫٨٣٣١١٤	٢٫٢٦٢١٥٩	٢٫٨٢١٤٣٤	٣٫٢٤٩٨٤٣	٢٩	١٫٦٩٩١٢٧	٢٫٠٤٥٢٣١	٢٫٤٦٢٠٢	٢٫٧٥٦٣٨٧
١٠	١٫٨١٢٤٦٢	٢٫٢٢٨١٣٩	٢٫٧٦٣٧٧٣	٣٫١٦٩٣٦٣	٣٠	١٫٦٩٧٢٦	٢٫٠٤٢٢٧	٢٫٤٥٧٢٦٤	٢٫٧٤٩٩٨٥
١١	١٫٧٩٥٨٨٤	٢٫٢٠٠٩٨٦	٢٫٧١٨٠٧٩	٣٫١٠٥٨١٥	٣٥	١٫٦٨٩٥٧٢	٢٫٠٣٠١١	٢٫٤٣٧٧١٩	٢٫٧٢٣٨٠٩
١٢	١٫٧٨٢٢٨٧	٢٫١٧٨٨١٣	٢٫٦٨٠٩٩	٣٫٠٥٤٥٣٨	٤٠	١٫٦٨٣٨٥٢	٢٫٠٢١٠٧٥	٢٫٤٢٣٢٥٨	٢٫٧٠٤٤٥٥
١٣	١٫٧٧٠٩٣٣	٢٫١٦٠٣٦٨	٢٫٦٥٠٣٠٤	٣٫٠١٢٢٨٣	٤٥	١٫٦٧٩٤٢٧	٢٫٠١٤١٠٣	٢٫٤١٢١١٦	٢٫٦٨٩٥٩٤
١٤	١٫٧٦١٣٠٩	٢٫١٤٤٧٨٩	٢٫٦٢٤٤٩٢	٢٫٩٧٦٨٤٩	٥٠	١٫٦٧٥٩٠٥	٢٫٠٠٨٥٦	٢٫٤٠٣٢٧٢	٢٫٦٧٧٧٨٩
١٥	١٫٧٥٣٠٥١	٢٫١٣١٤٥١	٢٫٦٠٢٤٨٣	٢٫٩٤٦٧٣٦	٦٠	١٫٦٧٠٦٤٩	٢٫٠٠٠٢٩٧	٢٫٣٩٠١١٦	٢٫٦٦٠٢٧٣
١٦	١٫٧٤٥٨٨٤	٢٫١١٩٩٠٥	٢٫٥٨٣٤٩٢	٢٫٩٢٠٧٨٨	٧٠	١٫٦٦٦٩١٥	١٫٩٩٤٤٣٥	٢٫٣٨٠٨٠٣	٢٫٦٤٧٩٠٣
١٧	١٫٧٣٩٦٠٦	٢٫١٠٩٨١٩	٢٫٥٦٦٩٤	٢٫٨٩٨٢٣٣	٨٠	١٫٦٦٤١٢٥	١٫٩٩٠٠٦٥	٢٫٣٧٣٨٧٣	٢٫٦٣٨٦٩٩
١٨	١٫٧٣٤٠٦٣	٢٫١٠٠٩٢٤	٢٫٥٥٢٣٧٩	٢٫٨٧٨٤٤٢	٩٠	١٫٦٦١٩٦١	١٫٩٨٦٦٧٣	٢٫٣٦٨٤٩٧	٢٫٦٣١٥٦٨
١٩	١٫٧٢٩١٣١	٢٫٠٩٣٠٢٥	٢٫٥٣٩٤٨٣	٢٫٨٦٠٩٤٣	١٠٠	١٫٦٦٠٢٣٥	١٫٩٨٣٩٧٢	٢٫٣٦٤٢٤٢	٢٫٦٢٥٨٩٢
٢٠	١٫٧٢٤٧١٨	٢٫٠٨٥٩٦٣	٢٫٥٢٧٩٧٧	٢٫٨٤٥٣٣٦	∞	١٫٦٤٦٣٧٩	١٫٩٦٢٣٣٩	٢٫٣٣٠٠٨	٢٫٥٨٠٧٤٦

جدول (٥) : جدول سنديكور لقيم ف *

α = ٠,٠٥

ن٢/ن١	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
١	١٦١,٤٥	١٩٩,٥٠	٢١٥,٧١	٢٢٤,٥٨	٢٣٠,١٦	٢٣٣,٩٩	٢٣٦,٧٧	٢٣٨,٨٨	٢٤٠,٥٤	٢٤١,٨٨	٢٤٢,٩٨	٢٤٣,٩٠
٢	١٨,٥١	١٩,٠٠	١٩,١٦	١٩,٢٥	١٩,٣٠	١٩,٣٣	١٩,٣٥	١٩,٣٧	١٩,٣٨	١٩,٤٠	١٩,٤٠	١٩,٤١
٣	١٠,١٣	٩,٥٥	٩,٢٨	٩,١٢	٩,٠١	٨,٩٤	٨,٨٩	٨,٨٥	٨,٨١	٨,٧٩	٨,٧٦	٨,٧٤
٤	٧,٧١	٦,٩٤	٦,٥٩	٦,٣٩	٦,٢٦	٦,١٦	٦,٠٩	٦,٠٤	٦,٠٠	٥,٩٦	٥,٩٤	٥,٩١
٥	٦,٦١	٥,٧٩	٥,٤١	٥,١٩	٥,٠٥	٤,٩٥	٤,٨٨	٤,٨٢	٤,٧٧	٤,٧٤	٤,٧٠	٤,٦٨
٦	٥,٩٩	٥,١٤	٤,٧٦	٤,٥٣	٤,٣٩	٤,٢٨	٤,٢١	٤,١٥	٤,١٠	٤,٠٦	٤,٠٣	٤,٠٠
٧	٥,٥٩	٤,٧٤	٤,٣٥	٤,١٢	٣,٩٧	٣,٨٧	٣,٧٩	٣,٧٣	٣,٦٨	٣,٦٤	٣,٦٠	٣,٥٧
٨	٥,٣٢	٤,٤٦	٤,٠٧	٣,٨٤	٣,٦٩	٣,٥٨	٣,٥٠	٣,٤٤	٣,٣٩	٣,٣٥	٣,٣١	٣,٢٨
٩	٥,١٢	٤,٢٦	٣,٨٦	٣,٦٣	٣,٤٨	٣,٣٧	٣,٢٩	٣,٢٣	٣,١٨	٣,١٤	٣,١٠	٣,٠٧
١٠	٤,٩٦	٤,١٠	٣,٧١	٣,٤٨	٣,٣٣	٣,٢٢	٣,١٤	٣,٠٧	٣,٠٢	٢,٩٨	٢,٩٤	٢,٩١
١١	٤,٨٤	٣,٩٨	٣,٥٩	٣,٣٦	٣,٢٠	٣,٠٩	٣,٠١	٢,٩٥	٢,٩٠	٢,٨٥	٢,٨٢	٢,٧٩
١٢	٤,٧٥	٣,٨٩	٣,٤٩	٣,٢٦	٣,١١	٣,٠٠	٢,٩١	٢,٨٥	٢,٨٠	٢,٧٥	٢,٧٢	٢,٦٩
١٣	٤,٦٧	٣,٨١	٣,٤١	٣,١٨	٣,٠٣	٢,٩٢	٢,٨٣	٢,٧٧	٢,٧١	٢,٦٧	٢,٦٣	٢,٦٠
١٤	٤,٦٠	٣,٧٤	٣,٣٤	٣,١١	٢,٩٦	٢,٨٥	٢,٧٦	٢,٧٠	٢,٦٥	٢,٦٠	٢,٥٧	٢,٥٣
١٥	٤,٥٤	٣,٦٨	٣,٢٩	٣,٠٦	٢,٩٠	٢,٧٩	٢,٧١	٢,٦٤	٢,٥٩	٢,٥٤	٢,٥١	٢,٤٨
١٦	٤,٤٩	٣,٦٣	٣,٢٤	٣,٠١	٢,٨٥	٢,٧٤	٢,٦٦	٢,٥٩	٢,٥٤	٢,٤٩	٢,٤٦	٢,٤٢
١٧	٤,٤٥	٣,٥٩	٣,٢٠	٢,٩٦	٢,٨١	٢,٧٠	٢,٦١	٢,٥٥	٢,٤٩	٢,٤٥	٢,٤١	٢,٣٨
١٨	٤,٤١	٣,٥٥	٣,١٦	٢,٩٣	٢,٧٧	٢,٦٦	٢,٥٨	٢,٥١	٢,٤٦	٢,٤١	٢,٣٧	٢,٣٤
١٩	٤,٣٨	٣,٥٢	٣,١٣	٢,٩٠	٢,٧٤	٢,٦٣	٢,٥٤	٢,٤٨	٢,٤٢	٢,٣٨	٢,٣٤	٢,٣١
٢٠	٤,٣٥	٣,٤٩	٣,١٠	٢,٨٧	٢,٧١	٢,٦٠	٢,٥١	٢,٤٥	٢,٣٩	٢,٣٥	٢,٣١	٢,٢٨
٢١	٤,٣٢	٣,٤٧	٣,٠٧	٢,٨٤	٢,٦٨	٢,٥٧	٢,٤٩	٢,٤٢	٢,٣٧	٢,٣٢	٢,٢٨	٢,٢٥
٢٢	٤,٣٠	٣,٤٤	٣,٠٥	٢,٨٢	٢,٦٦	٢,٥٥	٢,٤٦	٢,٤٠	٢,٣٤	٢,٣٠	٢,٢٦	٢,٢٣
٢٣	٤,٢٨	٣,٤٢	٣,٠٣	٢,٨٠	٢,٦٤	٢,٥٣	٢,٤٤	٢,٣٧	٢,٣٢	٢,٢٧	٢,٢٤	٢,٢٠
٢٤	٤,٢٦	٣,٤٠	٣,٠١	٢,٧٨	٢,٦٢	٢,٥١	٢,٤٢	٢,٣٦	٢,٣٠	٢,٢٥	٢,٢٢	٢,١٨
٢٥	٤,٢٤	٣,٣٩	٢,٩٩	٢,٧٦	٢,٦٠	٢,٤٩	٢,٤٠	٢,٣٤	٢,٢٨	٢,٢٤	٢,٢٠	٢,١٦
٢٦	٤,٢٣	٣,٣٧	٢,٩٨	٢,٧٤	٢,٥٩	٢,٤٧	٢,٣٩	٢,٣٢	٢,٢٧	٢,٢٢	٢,١٨	٢,١٥
٢٧	٤,٢١	٣,٣٥	٢,٩٦	٢,٧٣	٢,٥٧	٢,٤٦	٢,٣٧	٢,٣١	٢,٢٥	٢,٢٠	٢,١٧	٢,١٣

* ن١ – عدد درجات الحريه للتباين الاكبر

تابع جدول (٥) : جدول سنديكور لقيم ف *

α = ٠,٠٥

ن٢ / ن١	١٤	١٦	٢٠	٢٤	٣٠	٤٠	٥٠	٧٥	١٠٠	٢٠٠	٥٠٠	١٠٠٠
١	٢٤٥,٣٦	٢٤٦,٤٧	٢٤٨,٠٢	٢٤٩,٠٥	٢٥٠,١٠	٢٥١,١٤	٢٥١,٧٧	٢٥٢,٦٢	٢٥٣,٠٤	٢٥٣,٦٨	٢٥٤,٠٦	٢٥٤,١٩
٢	١٩,٤٢	١٩,٤٣	١٩,٤٥	١٩,٤٥	١٩,٤٦	١٩,٤٧	١٩,٤٨	١٩,٤٨	١٩,٤٩	١٩,٤٩	١٩,٤٩	١٩,٤٩
٣	٨,٧١	٨,٦٩	٨,٦٦	٨,٦٤	٨,٦٢	٨,٥٩	٨,٥٨	٨,٥٦	٨,٥٥	٨,٥٤	٨,٥٣	٨,٥٣
٤	٥,٨٧	٥,٨٤	٥,٨٠	٥,٧٧	٥,٧٥	٥,٧٢	٥,٧٠	٥,٦٨	٥,٦٦	٥,٦٥	٥,٦٤	٥,٦٣
٥	٤,٦٤	٤,٦٠	٤,٥٦	٤,٥٣	٤,٥٠	٤,٤٦	٤,٤٤	٤,٤٢	٤,٤١	٤,٣٩	٤,٣٧	٤,٣٧
٦	٣,٩٦	٣,٩٢	٣,٨٧	٣,٨٤	٣,٨١	٣,٧٧	٣,٧٥	٣,٧٣	٣,٧١	٣,٦٩	٣,٦٨	٣,٦٧
٧	٣,٥٣	٣,٤٩	٣,٤٤	٣,٤١	٣,٣٨	٣,٣٤	٣,٣٢	٣,٢٩	٣,٢٧	٣,٢٥	٣,٢٤	٣,٢٣
٨	٣,٢٤	٣,٢٠	٣,١٥	٣,١٢	٣,٠٨	٣,٠٤	٣,٠٢	٢,٩٩	٢,٩٧	٢,٩٥	٢,٩٤	٢,٩٣
٩	٣,٠٣	٢,٩٩	٢,٩٤	٢,٩٠	٢,٨٦	٢,٨٣	٢,٨٠	٢,٧٧	٢,٧٦	٢,٧٣	٢,٧٢	٢,٧١
١٠	٢,٨٦	٢,٨٣	٢,٧٧	٢,٧٤	٢,٧٠	٢,٦٦	٢,٦٤	٢,٦٠	٢,٥٩	٢,٥٦	٢,٥٥	٢,٥٤
١١	٢,٧٤	٢,٧٠	٢,٦٥	٢,٦١	٢,٥٧	٢,٥٣	٢,٥١	٢,٤٧	٢,٤٦	٢,٤٣	٢,٤٢	٢,٤١
١٢	٢,٦٤	٢,٦٠	٢,٥٤	٢,٥١	٢,٤٧	٢,٤٣	٢,٤٠	٢,٣٧	٢,٣٥	٢,٣٢	٢,٣١	٢,٣٠
١٣	٢,٥٥	٢,٥١	٢,٤٦	٢,٤٢	٢,٣٨	٢,٣٤	٢,٣١	٢,٢٨	٢,٢٦	٢,٢٣	٢,٢٢	٢,٢١
١٤	٢,٤٨	٢,٤٤	٢,٣٩	٢,٣٥	٢,٣١	٢,٢٧	٢,٢٤	٢,٢١	٢,١٩	٢,١٦	٢,١٤	٢,١٤
١٥	٢,٤٣	٢,٣٨	٢,٣٣	٢,٢٩	٢,٢٥	٢,٢٠	٢,١٨	٢,١٤	٢,١٢	٢,١٠	٢,٠٨	٢,٠٧
١٦	٢,٣٧	٢,٣٣	٢,٢٨	٢,٢٤	٢,١٩	٢,١٥	٢,١٢	٢,٠٩	٢,٠٧	٢,٠٤	٢,٠٢	٢,٠٢
١٧	٢,٣٣	٢,٢٩	٢,٢٣	٢,١٩	٢,١٥	٢,١٠	٢,٠٨	٢,٠٤	٢,٠٢	١,٩٩	١,٩٧	١,٩٧
١٨	٢,٢٩	٢,٢٥	٢,١٩	٢,١٥	٢,١١	٢,٠٦	٢,٠٤	٢,٠٠	١,٩٨	١,٩٥	١,٩٣	١,٩٢
١٩	٢,٢٦	٢,٢١	٢,١٦	٢,١١	٢,٠٧	٢,٠٣	٢,٠٠	١,٩٦	١,٩٤	١,٩١	١,٨٩	١,٨٨
٢٠	٢,٢٢	٢,١٨	٢,١٢	٢,٠٨	٢,٠٤	١,٩٩	١,٩٧	١,٩٣	١,٩١	١,٨٨	١,٨٦	١,٨٥
٢١	٢,٢٠	٢,١٦	٢,١٠	٢,٠٥	٢,٠١	١,٩٦	١,٩٤	١,٩٠	١,٨٨	١,٨٤	١,٨٣	١,٨٢
٢٢	٢,١٧	٢,١٣	٢,٠٧	٢,٠٣	١,٩٨	١,٩٤	١,٩١	١,٨٧	١,٨٥	١,٨٢	١,٨٠	١,٧٩
٢٣	٢,١٥	٢,١١	٢,٠٥	٢,٠١	١,٩٦	١,٩١	١,٨٨	١,٨٤	١,٨٢	١,٧٩	١,٧٧	١,٧٦
٢٤	٢,١٣	٢,٠٩	٢,٠٣	١,٩٨	١,٩٤	١,٨٩	١,٨٦	١,٨٢	١,٨٠	١,٧٧	١,٧٥	١,٧٤
٢٥	٢,١١	٢,٠٧	٢,٠١	١,٩٦	١,٩٢	١,٨٧	١,٨٤	١,٨٠	١,٧٨	١,٧٥	١,٧٣	١,٧٢
٢٦	٢,٠٩	٢,٠٥	١,٩٩	١,٩٥	١,٩٠	١,٨٥	١,٨٢	١,٧٨	١,٧٦	١,٧٣	١,٧١	١,٧٠
٢٧	٢,٠٨	٢,٠٤	١,٩٧	١,٩٣	١,٨٨	١,٨٤	١,٨١	١,٧٦	١,٧٤	١,٧١	١,٦٩	١,٦٨

* ن١ – عدد درجات الحريه للتباين الاكبر

تابع جدول (٥) : جدول سنديكور لقيم ف *

α = ٠,٠٥

ن٢ / ن١	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
٢٨	٤,٢٠	٣,٣٤	٢,٩٥	٢,٧١	٢,٥٦	٢,٤٥	٢,٣٦	٢,٢٩	٢,٢٤	٢,١٩	٢,١٥	٢,١٢
٢٩	٤,١٨	٣,٣٣	٢,٩٣	٢,٧٠	٢,٥٥	٢,٤٣	٢,٣٥	٢,٢٨	٢,٢٢	٢,١٨	٢,١٤	٢,١٠
٣٠	٤,١٧	٣,٣٢	٢,٩٢	٢,٦٩	٢,٥٣	٢,٤٢	٢,٣٣	٢,٢٧	٢,٢١	٢,١٦	٢,١٣	٢,٠٩
٣٢	٤,١٥	٣,٢٩	٢,٩٠	٢,٦٧	٢,٥١	٢,٤٠	٢,٣١	٢,٢٤	٢,١٩	٢,١٤	٢,١٠	٢,٠٧
٣٤	٤,١٣	٣,٢٨	٢,٨٨	٢,٦٥	٢,٤٩	٢,٣٨	٢,٢٩	٢,٢٣	٢,١٧	٢,١٢	٢,٠٨	٢,٠٥
٣٦	٤,١١	٣,٢٦	٢,٨٧	٢,٦٣	٢,٤٨	٢,٣٦	٢,٢٨	٢,٢١	٢,١٥	٢,١١	٢,٠٧	٢,٠٣
٣٨	٤,١٠	٣,٢٤	٢,٨٥	٢,٦٢	٢,٤٦	٢,٣٥	٢,٢٦	٢,١٩	٢,١٤	٢,٠٩	٢,٠٥	٢,٠٢
٤٠	٤,٠٨	٣,٢٣	٢,٨٤	٢,٦١	٢,٤٥	٢,٣٤	٢,٢٥	٢,١٨	٢,١٢	٢,٠٨	٢,٠٤	٢,٠٠
٤٢	٤,٠٧	٣,٢٢	٢,٨٣	٢,٥٩	٢,٤٤	٢,٣٢	٢,٢٤	٢,١٧	٢,١١	٢,٠٦	٢,٠٢	١,٩٩
٤٤	٤,٠٦	٣,٢١	٢,٨٢	٢,٥٨	٢,٤٣	٢,٣١	٢,٢٣	٢,١٦	٢,١٠	٢,٠٥	٢,٠١	١,٩٨
٤٦	٤,٠٥	٣,٢٠	٢,٨١	٢,٥٧	٢,٤٢	٢,٣٠	٢,٢٢	٢,١٥	٢,٠٩	٢,٠٤	٢,٠٠	١,٩٧
٤٨	٤,٠٤	٣,١٩	٢,٨٠	٢,٥٧	٢,٤١	٢,٢٩	٢,٢١	٢,١٤	٢,٠٨	٢,٠٣	١,٩٩	١,٩٦
٥٠	٤,٠٣	٣,١٨	٢,٧٩	٢,٥٦	٢,٤٠	٢,٢٩	٢,٢٠	٢,١٣	٢,٠٧	٢,٠٢	١,٩٩	١,٩٥
٥٥	٤,٠٢	٣,١٦	٢,٧٧	٢,٥٤	٢,٣٨	٢,٢٧	٢,١٨	٢,١١	٢,٠٦	٢,٠١	١,٩٧	١,٩٣
٦٠	٤,٠٠	٣,١٥	٢,٧٦	٢,٥٣	٢,٣٧	٢,٢٥	٢,١٧	٢,١٠	٢,٠٤	١,٩٩	١,٩٥	١,٩٢
٦٥	٣,٩٩	٣,١٤	٢,٧٥	٢,٥١	٢,٣٦	٢,٢٤	٢,١٥	٢,٠٨	٢,٠٢	١,٩٨	١,٩٤	١,٩٠
٧٠	٣,٩٨	٣,١٢	٢,٧٤	٢,٥٠	٢,٣٥	٢,٢٣	٢,١٤	٢,٠٧	٢,٠٢	١,٩٧	١,٩٣	١,٨٩
٨٠	٣,٩٦	٣,١١	٢,٧٢	٢,٤٩	٢,٣٣	٢,٢١	٢,١٣	٢,٠٦	٢,٠٠	١,٩٥	١,٩١	١,٨٨
١٠٠	٣,٩٤	٣,٠٩	٢,٧٠	٢,٤٦	٢,٣١	٢,١٩	٢,١٠	٢,٠٣	١,٩٧	١,٩٣	١,٨٩	١,٨٥
١٢٥	٣,٩٢	٣,٠٧	٢,٦٨	٢,٤٤	٢,٢٩	٢,١٧	٢,٠٨	٢,٠١	١,٩٦	١,٩١	١,٨٧	١,٨٣
١٥٠	٣,٩٠	٣,٠٦	٢,٦٦	٢,٤٣	٢,٢٧	٢,١٦	٢,٠٧	٢,٠٠	١,٩٤	١,٨٩	١,٨٥	١,٨٢
٢٠٠	٣,٨٩	٣,٠٤	٢,٦٥	٢,٤٢	٢,٢٦	٢,١٤	٢,٠٦	١,٩٨	١,٩٢	١,٨٨	١,٨٤	١,٨٠
٤٠٠	٣,٨٦	٣,٠٢	٢,٦٣	٢,٣٩	٢,٢٤	٢,١٢	٢,٠٣	١,٩٦	١,٩٠	١,٨٥	١,٨١	١,٧٨
١٠٠٠	٣,٨٥	٣,٠٠	٢,٦١	٢,٣٨	٢,٢٢	٢,١١	٢,٠٢	١,٩٥	١,٨٩	١,٨٤	١,٨٠	١,٧٦
١٠٠٠٠	٣,٨٤	٣,٠٠	٢,٦١	٢,٣٧	٢,٢١	٢,١٠	٢,٠١	١,٩٤	١,٨٨	١,٨٣	١,٧٩	١,٧٥

* ن١ = عدد درجات الحريه للتباين الاكبر

تابع جدول (٥) : جدول سنديكور لقيم ف *

α = ٠,٠٥

ن٢ / ن١	١٤	١٦	٢٠	٢٤	٣٠	٤٠	٥٠	٧٥	١٠٠	٢٠٠	٥٠٠	١٠٠٠
٢٨	٢,٠٦	٢,٠٢	[illegible]	١,٩١	١,٨٧	١,٨٢	١,٧٩	١,٧٥	١,٧٢	١,٦٩	١,٦٧	١,٦٦
٢٩	٢,٠٥	٢,٠١	١,٩٤	١,٩٠	١,٨٥	١,٨١	١,٧٧	١,٧٣	١,٧١	١,٦٧	١,٦٥	١,٦٥
٣٠	٢,٠٤	١,٩٩	١,٩٣	١,٨٩	١,٨٤	١,٧٩	١,٧٦	١,٧٢	١,٧٠	١,٦٦	١,٦٤	١,٦٢
٣٢	٢,٠١	١,٩٧	١,٩١	١,٨٦	١,٨٢	١,٧٧	١,٧٤	١,٦٩	١,٦٧	١,٦٣	١,٦١	١,٦٠
٣٤	١,٩٩	١,٩٥	١,٨٩	١,٨٤	١,٨٠	١,٧٥	١,٧١	١,٦٧	١,٦٥	١,٦١	١,٥٩	١,٥٨
٣٦	١,٩٨	١,٩٣	١,٨٧	١,٨٢	١,٧٨	١,٧٢	١,٦٩	١,٦٥	١,٦٢	١,٥٩	١,٥٦	١,٥٦
٣٨	١,٩٦	١,٩٢	١,٨٥	١,٨١	١,٧٦	١,٧١	١,٦٨	١,٦٣	١,٦١	١,٥٧	١,٥٤	١,٥٤
٤٠	١,٩٥	١,٩٠	١,٨٤	١,٧٩	١,٧٤	١,٦٩	١,٦٦	١,٦١	١,٥٩	١,٥٥	١,٥٣	١,٥٢
٤٢	١,٩٤	١,٨٩	١,٨٣	١,٧٨	١,٧٣	١,٦٨	١,٦٥	١,٦٠	١,٥٧	١,٥٣	١,٥١	١,٥٠
٤٤	١,٩٢	١,٨٨	١,٨١	١,٧٧	١,٧٢	١,٦٧	١,٦٣	١,٥٩	١,٥٦	١,٥٢	١,٤٩	١,٤٩
٤٦	١,٩١	١,٨٧	١,٨٠	١,٧٦	١,٧١	١,٦٥	١,٦٢	١,٥٧	١,٥٥	١,٥١	١,٤٨	١,٤٧
٤٨	١,٩٠	١,٨٦	١,٧٩	١,٧٥	١,٧٠	١,٦٤	١,٦١	١,٥٦	١,٥٤	١,٤٩	١,٤٧	١,٤٦
٥٠	١,٨٩	١,٨٥	١,٧٨	١,٧٤	١,٦٩	١,٦٣	١,٦٠	١,٥٥	١,٥٢	١,٤٨	١,٤٦	١,٤٥
٥٥	١,٨٨	١,٨٣	١,٧٦	١,٧٢	١,٦٧	١,٦١	١,٥٨	١,٥٣	١,٥٠	١,٤٦	١,٤٣	١,٤٢
٦٠	١,٨٦	١,٨٢	١,٧٥	١,٧٠	١,٦٥	١,٥٩	١,٥٦	١,٥١	١,٤٨	١,٤٤	١,٤١	١,٤٠
٦٥	١,٨٥	١,٨٠	١,٧٣	١,٦٩	١,٦٣	١,٥٨	١,٥٤	١,٤٩	١,٤٦	١,٤٢	١,٣٩	١,٣٨
٧٠	١,٨٤	١,٧٩	١,٧٢	١,٦٧	١,٦٢	١,٥٧	١,٥٣	١,٤٨	١,٤٥	١,٤٠	١,٣٧	١,٣٦
٨٠	١,٨٢	١,٧٧	١,٧٠	١,٦٥	١,٦٠	١,٥٤	١,٥١	١,٤٥	١,٤٢	١,٣٨	١,٣٥	١,٣٤
١٠٠	١,٧٩	١,٧٥	١,٦٨	١,٦٣	١,٥٧	١,٥٢	١,٤٨	١,٤٢	١,٣٩	١,٣٤	١,٣١	١,٣٠
١٢٥	١,٧٧	١,٧٢	١,٦٦	١,٦٠	١,٥٥	١,٤٩	١,٤٥	١,٤٠	١,٣٦	١,٣١	١,٢٧	١,٢٦
١٥٠	١,٧٦	١,٧١	١,٦٤	١,٥٩	١,٥٤	١,٤٨	١,٤٤	١,٣٨	١,٣٤	١,٢٩	١,٢٥	١,٢٤
٢٠٠	١,٧٤	١,٦٩	١,٦٢	١,٥٧	١,٥٢	١,٤٦	١,٤١	١,٣٥	١,٣٢	١,٢٦	١,٢٢	١,٢١
٤٠٠	١,٧٢	١,٦٧	١,٦٠	١,٥٤	١,٤٩	١,٤٢	١,٣٨	١,٣٢	١,٢٨	١,٢٢	١,١٧	١,١٥
١٠٠٠	١,٧٠	١,٦٥	١,٥٨	١,٥٣	١,٤٧	١,٤١	١,٣٦	١,٣٠	١,٢٦	١,١٩	١,١٣	١,١١
١٠٠٠٠	١,٦٩	١,٦٤	١,٥٧	١,٥٢	١,٤٦	١,٤٠	١,٣٥	١,٢٨	١,٢٥	١,١٧	١,١١	١,٠٨

* ن١ – عدد درجات الحريه للتباين الاكبر

تابع جدول (٥) : جدول سنديكور لقيم ف *

α = ٠,٠١

ن٢/ن١	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
١	٤٠٥٢	٤٩٩٩	٥٤٠٤	٥٦٢٤	٥٧٦٤	٥٨٥٩	٥٩٢٨	٥٩٨١	٦٠٢٢	٦٠٥٦	٦٠٨٣	٦١٠٧
٢	٩٨,٥٠	٩٩,٠٠	٩٩,١٦	٩٩,٢٥	٩٩,٣٠	٩٩,٣٣	٩٩,٣٦	٩٩,٣٨	٩٩,٣٩	٩٩,٤٠	٩٩,٤١	٩٩,٤٢
٣	٣٤,١٢	٣٠,٨٢	٢٩,٤٦	٢٨,٧١	٢٨,٢٤	٢٧,٩١	٢٧,٦٧	٢٧,٤٩	٢٧,٣٤	٢٧,٢٣	٢٧,١٣	٢٧,٠٥
٤	٢١,٢٠	١٨,٠٠	١٦,٦٩	١٥,٩٨	١٥,٥٢	١٥,٢١	١٤,٩٨	١٤,٨٠	١٤,٦٦	١٤,٥٥	١٤,٤٥	١٤,٣٧
٥	١٦,٢٦	١٣,٢٧	١٢,٠٦	١١,٣٩	١٠,٩٧	١٠,٦٧	١٠,٤٦	١٠,٢٩	١٠,١٦	١٠,٠٥	٩,٩٦	٩,٨٩
٦	١٣,٧٥	١٠,٩٢	٩,٧٨	٩,١٥	٨,٧٥	٨,٤٧	٨,٢٦	٨,١٠	٧,٩٨	٧,٨٧	٧,٧٩	٧,٧٢
٧	١٢,٢٥	٩,٥٥	٨,٤٥	٧,٨٥	٧,٤٦	٧,١٩	٦,٩٩	٦,٨٤	٦,٧٢	٦,٦٢	٦,٥٤	٦,٤٧
٨	١١,٢٦	٨,٦٥	٧,٥٩	٧,٠١	٦,٦٣	٦,٣٧	٦,١٨	٦,٠٣	٥,٩١	٥,٨١	٥,٧٣	٥,٦٧
٩	١٠,٥٦	٨,٠٢	٦,٩٩	٦,٤٢	٦,٠٦	٥,٨٠	٥,٦١	٥,٤٧	٥,٣٥	٥,٢٦	٥,١٨	٥,١١
١٠	١٠,٠٤	٧,٥٦	٦,٥٥	٥,٩٩	٥,٦٤	٥,٣٩	٥,٢٠	٥,٠٦	٤,٩٤	٤,٨٥	٤,٧٧	٤,٧١
١١	٩,٦٥	٧,٢١	٦,٢٢	٥,٦٧	٥,٣٢	٥,٠٧	٤,٨٩	٤,٧٤	٤,٦٣	٤,٥٤	٤,٤٦	٤,٤٠
١٢	٩,٣٣	٦,٩٣	٥,٩٥	٥,٤١	٥,٠٦	٤,٨٢	٤,٦٤	٤,٥٠	٤,٣٩	٤,٣٠	٤,٢٢	٤,١٦
١٣	٩,٠٧	٦,٧٠	٥,٧٤	٥,٢١	٤,٨٦	٤,٦٢	٤,٤٤	٤,٣٠	٤,١٩	٤,١٠	٤,٠٢	٣,٩٦
١٤	٨,٨٦	٦,٥١	٥,٥٦	٥,٠٤	٤,٦٩	٤,٤٦	٤,٢٨	٤,١٤	٤,٠٣	٣,٩٤	٣,٨٦	٣,٨٠
١٥	٨,٦٨	٦,٣٦	٥,٤٢	٤,٨٩	٤,٥٦	٤,٣٢	٤,١٤	٤,٠٠	٣,٨٩	٣,٨٠	٣,٧٣	٣,٦٧
١٦	٨,٥٣	٦,٢٣	٥,٢٩	٤,٧٧	٤,٤٤	٤,٢٠	٤,٠٣	٣,٨٩	٣,٧٨	٣,٦٩	٣,٦٢	٣,٥٥
١٧	٨,٤٠	٦,١١	٥,١٩	٤,٦٧	٤,٣٤	٤,١٠	٣,٩٣	٣,٧٩	٣,٦٨	٣,٥٩	٣,٥٢	٣,٤٦
١٨	٨,٢٩	٦,٠١	٥,٠٩	٤,٥٨	٤,٢٥	٤,٠١	٣,٨٤	٣,٧١	٣,٦٠	٣,٥١	٣,٤٣	٣,٣٧
١٩	٨,١٨	٥,٩٣	٥,٠١	٤,٥٠	٤,١٧	٣,٩٤	٣,٧٧	٣,٦٣	٣,٥٢	٣,٤٣	٣,٣٦	٣,٣٠
٢٠	٨,١٠	٥,٨٥	٤,٩٤	٤,٤٣	٤,١٠	٣,٨٧	٣,٧٠	٣,٥٦	٣,٤٦	٣,٣٧	٣,٢٩	٣,٢٣
٢١	٨,٠٢	٥,٧٨	٤,٨٧	٤,٣٧	٤,٠٤	٣,٨١	٣,٦٤	٣,٥١	٣,٤٠	٣,٣١	٣,٢٤	٣,١٧
٢٢	٧,٩٥	٥,٧٢	٤,٨٢	٤,٣١	٣,٩٩	٣,٧٦	٣,٥٩	٣,٤٥	٣,٣٥	٣,٢٦	٣,١٨	٣,١٢
٢٣	٧,٨٨	٥,٦٦	٤,٧٦	٤,٢٦	٣,٩٤	٣,٧١	٣,٥٤	٣,٤١	٣,٣٠	٣,٢١	٣,١٤	٣,٠٧
٢٤	٧,٨٢	٥,٦١	٤,٧٢	٤,٢٢	٣,٩٠	٣,٦٧	٣,٥٠	٣,٣٦	٣,٢٦	٣,١٧	٣,٠٩	٣,٠٣
٢٥	٧,٧٧	٥,٥٧	٤,٦٨	٤,١٨	٣,٨٥	٣,٦٣	٣,٤٦	٣,٣٢	٣,٢٢	٣,١٣	٣,٠٦	٢,٩٩
٢٦	٧,٧٢	٥,٥٣	٤,٦٤	٤,١٤	٣,٨٢	٣,٥٩	٣,٤٢	٣,٢٩	٣,١٨	٣,٠٩	٣,٠٢	٢,٩٦
٢٧	٧,٦٨	٥,٤٩	٤,٦٠	٤,١١	٣,٧٨	٣,٥٦	٣,٣٩	٣,٢٦	٣,١٥	٣,٠٦	٢,٩٩	٢,٩٣

* ن١ = عدد درجات الحريه للتباين الاكبر

تابع جدول (٥) : جدول سنديكور لقيم ف *

α = ٠,٠١

ن٢/ن١	١٤	١٦	٢٠	٢٤	٣٠	٤٠	٥٠	٧٥	١٠٠	٢٠٠	٥٠٠	١٠٠٠
١	٦١٤٢	٦١٧٠	٦٢٠٩	٦٢٣٤	٦٢٦٠	٦٢٨٦	٦٣٠٢	٦٣٢٤	٦٣٣٤	٦٣٥٠	٦٣٦٠	٦٣٦٣
٢	٩٩,٤٣	٩٩,٤٤	٩٩,٤٥	٩٩,٤٦	٩٩,٤٧	٩٩,٤٨	٩٩,٤٨	٩٩,٤٨	٩٩,٤٩	٩٩,٤٩	٩٩,٥٠	٩٩,٥٠
٣	٢٦,٩٢	٢٦,٨٣	٢٦,٦٩	٢٦,٦٠	٢٦,٥٠	٢٦,٤١	٢٦,٣٥	٢٦,٢٨	٢٦,٢٤	٢٦,١٨	٢٦,١٥	٢٦,١٤
٤	١٤,٢٥	١٤,١٥	١٤,٠٢	١٣,٩٣	١٣,٨٤	١٣,٧٥	١٣,٦٩	١٣,٦١	١٣,٥٨	١٣,٥٢	١٣,٤٩	١٣,٤٧
٥	٩,٧٧	٩,٦٨	٩,٥٥	٩,٤٧	٩,٣٨	٩,٢٩	٩,٢٤	٩,١٧	٩,١٣	٩,٠٨	٩,٠٤	٩,٠٣
٦	٧,٦٠	٧,٥٢	٧,٤٠	٧,٣١	٧,٢٣	٧,١٤	٧,٠٩	٧,٠٢	٦,٩٩	٦,٩٣	٦,٩٠	٦,٨٩
٧	٦,٣٦	٦,٢٨	٦,١٦	٦,٠٧	٥,٩٩	٥,٩١	٥,٨٦	٥,٧٩	٥,٧٥	٥,٧٠	٥,٦٧	٥,٦٦
٨	٥,٥٦	٥,٤٨	٥,٣٦	٥,٢٨	٥,٢٠	٥,١٢	٥,٠٧	٥,٠٠	٤,٩٦	٤,٩١	٤,٨٨	٤,٨٧
٩	٥,٠١	٤,٩٢	٤,٨١	٤,٧٣	٤,٦٥	٤,٥٧	٤,٥٢	٤,٤٥	٤,٤١	٤,٣٦	٤,٣٣	٤,٣٢
١٠	٤,٦٠	٤,٥٢	٤,٤١	٤,٣٣	٤,٢٥	٤,١٧	٤,١٢	٤,٠٥	٤,٠١	٣,٩٦	٣,٩٣	٣,٩٢
١١	٤,٢٩	٤,٢١	٤,١٠	٤,٠٢	٣,٩٤	٣,٨٦	٣,٨١	٣,٧٤	٣,٧١	٣,٦٦	٣,٦٢	٣,٦١
١٢	٤,٠٥	٣,٩٧	٣,٨٦	٣,٧٨	٣,٧٠	٣,٦٢	٣,٥٧	٣,٥٠	٣,٤٧	٣,٤١	٣,٣٨	٣,٣٧
١٣	٣,٨٦	٣,٧٨	٣,٦٦	٣,٥٩	٣,٥١	٣,٤٣	٣,٣٨	٣,٣١	٣,٢٧	٣,٢٢	٣,١٩	٣,١٨
١٤	٣,٧٠	٣,٦٢	٣,٥١	٣,٤٣	٣,٣٥	٣,٢٧	٣,٢٢	٣,١٥	٣,١١	٣,٠٦	٣,٠٢	٣,٠٢
١٥	٣,٥٦	٣,٤٩	٣,٣٧	٣,٢٩	٣,٢١	٣,١٣	٣,٠٨	٣,٠١	٢,٩٨	٢,٩٢	٢,٨٩	٢,٨٨
١٦	٣,٤٥	٣,٣٧	٣,٢٦	٣,١٨	٣,١٠	٣,٠٢	٢,٩٧	٢,٩٠	٢,٨٦	٢,٨١	٢,٧٨	٢,٧٦
١٧	٣,٣٥	٣,٢٧	٣,١٦	٣,٠٨	٣,٠٠	٢,٩٢	٢,٨٧	٢,٨٠	٢,٧٦	٢,٧١	٢,٦٨	٢,٦٦
١٨	٣,٢٧	٣,١٩	٣,٠٨	٣,٠٠	٢,٩٢	٢,٨٤	٢,٧٨	٢,٧١	٢,٦٨	٢,٦٢	٢,٥٩	٢,٥٨
١٩	٣,١٩	٣,١٢	٣,٠٠	٢,٩٢	٢,٨٤	٢,٧٦	٢,٧١	٢,٦٤	٢,٦٠	٢,٥٥	٢,٥١	٢,٥٠
٢٠	٣,١٣	٣,٠٥	٢,٩٤	٢,٨٦	٢,٧٨	٢,٦٩	٢,٦٤	٢,٥٧	٢,٥٤	٢,٤٨	٢,٤٤	٢,٤٢
٢١	٣,٠٧	٢,٩٩	٢,٨٨	٢,٨٠	٢,٧٢	٢,٦٤	٢,٥٨	٢,٥١	٢,٤٨	٢,٤٢	٢,٣٨	٢,٣٧
٢٢	٣,٠٢	٢,٩٤	٢,٨٣	٢,٧٥	٢,٦٧	٢,٥٨	٢,٥٣	٢,٤٦	٢,٤٢	٢,٣٦	٢,٣٣	٢,٣٢
٢٣	٢,٩٧	٢,٨٩	٢,٧٨	٢,٧٠	٢,٦٢	٢,٥٤	٢,٤٨	٢,٤١	٢,٣٧	٢,٣٢	٢,٢٨	٢,٢٧
٢٤	٢,٩٣	٢,٨٥	٢,٧٤	٢,٦٦	٢,٥٨	٢,٤٩	٢,٤٤	٢,٣٧	٢,٣٣	٢,٢٧	٢,٢٤	٢,٢٢
٢٥	٢,٨٩	٢,٨١	٢,٧٠	٢,٦٢	٢,٥٤	٢,٤٥	٢,٤٠	٢,٣٣	٢,٢٩	٢,٢٣	٢,١٩	٢,١٨
٢٦	٢,٨٦	٢,٧٨	٢,٦٦	٢,٥٨	٢,٥٠	٢,٤٢	٢,٣٦	٢,٢٩	٢,٢٥	٢,١٩	٢,١٦	٢,١٤
٢٧	٢,٨٢	٢,٧٥	٢,٦٣	٢,٥٥	٢,٤٧	٢,٣٨	٢,٣٣	٢,٢٦	٢,٢٢	٢,١٦	٢,١٢	٢,١١

* ن١ – عدد درجات الحريه للتباين الاكبر

تابع جدول (٥) : جدول سنديكور لقيم ف *

α = ٠,٠١

ن٢/ن١	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
٢٨	٧,٦٤	٥,٤٥	٤,٥٧	٤,٠٧	٣,٧٥	٣,٥٣	٣,٣٦	٣,٢٣	٣,١٢	٣,٠٣	٢,٩٦	٢,٩٠
٢٩	٧,٦٠	٥,٤٢	٤,٥٤	٤,٠٤	٣,٧٣	٣,٥٠	٣,٣٣	٣,٢٠	٣,٠٩	٣,٠٠	٢,٩٣	٢,٨٧
٣٠	٧,٥٦	٥,٣٩	٤,٥١	٤,٠٢	٣,٧٠	٣,٤٧	٣,٣٠	٣,١٧	٣,٠٧	٢,٩٨	٢,٩١	٢,٨٤
٣٢	٧,٥٠	٥,٣٤	٤,٤٦	٣,٩٧	٣,٦٥	٣,٤٣	٣,٢٦	٣,١٣	٣,٠٢	٢,٩٣	٢,٨٦	٢,٨٠
٣٤	٧,٤٤	٥,٢٩	٤,٤٢	٣,٩٣	٣,٦١	٣,٣٩	٣,٢٢	٣,٠٩	٢,٩٨	٢,٨٩	٢,٨٢	٢,٧٦
٣٦	٧,٤٠	٥,٢٥	٤,٣٨	٣,٨٩	٣,٥٧	٣,٣٥	٣,١٨	٣,٠٥	٢,٩٥	٢,٨٦	٢,٧٩	٢,٧٢
٣٨	٧,٣٥	٥,٢١	٤,٣٤	٣,٨٦	٣,٥٤	٣,٣٢	٣,١٥	٣,٠٢	٢,٩٢	٢,٨٣	٢,٧٥	٢,٦٩
٤٠	٧,٣١	٥,١٨	٤,٣١	٣,٨٣	٣,٥١	٣,٢٩	٣,١٢	٢,٩٩	٢,٨٩	٢,٨٠	٢,٧٣	٢,٦٦
٤٢	٧,٢٨	٥,١٥	٤,٢٩	٣,٨٠	٣,٤٩	٣,٢٧	٣,١٠	٢,٩٧	٢,٨٦	٢,٧٨	٢,٧٠	٢,٦٤
٤٤	٧,٢٥	٥,١٢	٤,٢٦	٣,٧٨	٣,٤٧	٣,٢٤	٣,٠٨	٢,٩٥	٢,٨٤	٢,٧٥	٢,٦٨	٢,٦٢
٤٦	٧,٢٢	٥,١٠	٤,٢٤	٣,٧٦	٣,٤٤	٣,٢٢	٣,٠٦	٢,٩٣	٢,٨٢	٢,٧٣	٢,٦٦	٢,٦٠
٤٨	٧,١٩	٥,٠٨	٤,٢٢	٣,٧٤	٣,٤٣	٣,٢٠	٣,٠٤	٢,٩١	٢,٨٠	٢,٧١	٢,٦٤	٢,٥٨
٥٠	٧,١٧	٥,٠٦	٤,٢٠	٣,٧٢	٣,٤١	٣,١٩	٣,٠٢	٢,٨٩	٢,٧٨	٢,٧٠	٢,٦٣	٢,٥٦
٥٥	٧,١٢	٥,٠١	٤,١٦	٣,٦٨	٣,٣٧	٣,١٥	٢,٩٨	٢,٨٥	٢,٧٥	٢,٦٦	٢,٥٩	٢,٥٣
٦٠	٧,٠٨	٤,٩٨	٤,١٣	٣,٦٥	٣,٣٤	٣,١٢	٢,٩٥	٢,٨٢	٢,٧٢	٢,٦٣	٢,٥٦	٢,٥٠
٦٥	٧,٠٤	٤,٩٥	٤,١٠	٣,٦٢	٣,٣١	٣,٠٩	٢,٩٣	٢,٨٠	٢,٦٩	٢,٦١	٢,٥٣	٢,٤٧
٧٠	٧,٠١	٤,٩٢	٤,٠٧	٣,٦٠	٣,٢٩	٣,٠٧	٢,٩١	٢,٧٨	٢,٦٧	٢,٥٩	٢,٥١	٢,٤٥
٨٠	٦,٩٦	٤,٨٨	٤,٠٤	٣,٥٦	٣,٢٦	٣,٠٤	٢,٨٧	٢,٧٤	٢,٦٤	٢,٥٥	٢,٤٨	٢,٤٢
١٠٠	٦,٩٠	٤,٨٢	٣,٩٨	٣,٥١	٣,٢١	٢,٩٩	٢,٨٢	٢,٦٩	٢,٥٩	٢,٥٠	٢,٤٣	٢,٣٧
١٢٥	٦,٨٤	٤,٧٨	٣,٩٤	٣,٤٧	٣,١٧	٢,٩٥	٢,٧٩	٢,٦٦	٢,٥٥	٢,٤٧	٢,٣٩	٢,٣٣
١٥٠	٦,٨١	٤,٧٥	٣,٩١	٣,٤٥	٣,١٤	٢,٩٢	٢,٧٦	٢,٦٣	٢,٥٣	٢,٤٤	٢,٣٧	٢,٣١
٢٠٠	٦,٧٦	٤,٧١	٣,٨٨	٣,٤١	٣,١١	٢,٨٩	٢,٧٣	٢,٦٠	٢,٥٠	٢,٤١	٢,٣٤	٢,٢٧
٤٠٠	٦,٧٠	٤,٦٦	٣,٨٣	٣,٣٧	٣,٠٦	٢,٨٥	٢,٦٨	٢,٥٦	٢,٤٥	٢,٣٧	٢,٢٩	٢,٢٣
١٠٠٠	٦,٦٦	٤,٦٣	٣,٨٠	٣,٣٤	٣,٠٤	٢,٨٢	٢,٦٦	٢,٥٣	٢,٤٣	٢,٣٤	٢,٢٧	٢,٢٠

* ن١ = عدد درجات الحريه للتباين الاكبر

جدول (٦)

توزيع كا^{٢}: يعطى الجدول قيمة كا^{٢} التى تكون المساحة المظللة بعدها مساوية α عندما تكون درجات الحرية ن.

α

س كا^{٢} (ن،α)

ن	٠,٠٠٥	٠,٠١	٠,٠٢٥	٠,٠٥	٠,١٠	٠,٢٥	,٥٠٠	٠,٧٥	٠,٩٠	٠,٩٥	٠,٩٧٥	٠,٩٩	٠,٩٩٥
١	٧,٨٨	٦,٦٣	٥,٠٢	٣,٨٤	٢,٧١	١,٣٢	,٤٥٥	,١٠٢	,٠١٥٨	,٠٠٣٩	,٠٠١٠	,٠٠٠٢	,٠٠٠٠
٢	١٠,٦	٩,٢١	٧,٣٨	٥,٩٩	٤,٦١	٢,٧٧	٦,٣٩	,٥٧٢	,٢١١	,١٠٣	,٠٥٠٦	,٠٢٠١	,٠١٠٠
٣	١٢,٨	١١,٣	٩,٣٥	٧,٨١	٦,٢٥	٤,١١	٢,٣٧	١,٢١	,٥٨٤	,٣٥٢	,٢١٦	,١١٥	,٠٧٢
٤	١٤,٩	١٣,٣	١١,١	٩,٤٩	٧,٧٨	٥,٣٩	٣,٣٦	١,٩٢	١,٠٦	,٧١١	,٤٨٤	,٢٩٧	,٢٠٧
٥	١٦,٧	١٥,١	١٢,٨	١١,١	٩,٢٤	٦,٦٣	٤,٣٥	٢,٦٧	١,٦١	١,١٥	,٨٣١	,٥٥٤	,٤١٢
٦	١٨,٥	١٦,٨	١٤,٤	١٢,٦	١٠,٦	٧,٨٤	٥,٣٥	٣,٤٥	٢,٢٠	١,٦٤	١,٢٤	,٨٧٢	,٦٧٦
٧	٢٠,٣	١٨,٥	١٦,٠	١٤,١	١٢,٠	٩,٠٤	٦,٣٥	٤,٢٥	٢,٨٣	٢,١٧	١,٦٩	١,٢٤	,٩٨٩
٨	٢٢,٠	٢٠,١	١٧,٥	١٥,٥	١٣,٤	١٠,٢	٧,٣٤	٥,٠٧	٣,٤٩	٢,٧٣	٢,١٨	١,٦٥	١,٣٤
٩	٢٣,٦	٢١,٧	١٩,٠	١٦,٩	١٤,٧	١١,٤	٨,٣٤	٥,٩٠	٤,١٧	٣,٣٣	٢,٧٠	٢,٠٩	١,٧٣
١٠	٢٥,٢	٢٣,٣	٢٠,٥	١٨,٣	١٦,٠	١٢,٥	٩,٣٤	٦,٧٤	٤,٨٧	٣,٩٤	٣,٢٥	٢,٥٦	٢,١٦
١١	٢٦,٨	٢٤,٧	٥١,٩	١٩,٧	١٧,٣	١٣,٧	١٠,٣	٧,٥٨	٥,٥٨	٤,٥٧	٣,٨٢	٣,٠٥	٢,٢٠

تابع جدول (٦)

١٠	٢٥,٢	٢٣,٣	٢٠,٥	١٨,٣	١٦,٠	١٢,٥	٩,٣٤	٦,٧٤	٤,٨٧	٣,٩٤	٣,٢٥	٢,٥٦	٢,١٦
١١	٢٦,٨	٢٤,٧	٥١,٩	١٩,٧	١٧,٣	١٣,٧	١٠,٣	٧,٥٨	٥,٥٨	٤,٥٧	٣,٨٢	٣,٠٥	٢,٢٠
١٢	٢٨,٣	٢٦,٢	٢٣,٣	٢١,٠	١٨,٥	١٤,٨	١١,٣	٨,٤٤	٦,٣٠	٥,٢٣	٤,٤٠	٣,٥٧	٣,٠٧
١٣	٢٩,٨	٢٧,٧	٢٤,٧	٢٢,٤	١٩,٨	١٦,٠	١٢,٣	٩,٣٠	٧,٠٤	٥,٨٩	٥,٠١	٤,١١	٣,٥٧
١٤	٣١,٣	٢٩,١	٢٦,١	٢٣,٧	٢١,١	١٧,١	١٣,٣	١٠,٢	٧,٧٩	٦,٥٧	٥,٦٣	٤,٦٦	٤,٠٧
١٥	٣٢,٨	٣٠,٦	٢٧,٥	٢٥,٠	٢٢,٣	١٨,٢	١٤,٣	١١,٠	٨,٥٥	٧,٢٦	٦,٢٦	٥,٢٣	٤,٦٠
١٦	٣٤,٣	٣٢,٠	٢٨,٨	٢٦,٣	٢٣,٥	١٩,٤	١٥,٣	١١,٩	٩,٣١	٧,٩٦	٦,٩١	٥,٨١	٥,١٤
١٧	٣٥,٧	٣٣,٤	٣٠,٢	٢٧,٦	٢٤,٨	٢٠,٥	١٦,٣	١٢,٨	١٠,١	٨,٦٧	٧,٥٦	٦,٤١	٥,٧٠
١٨	٣٧,٢	٣٤,٨	٣١,٥	٢٨,٩	٢٦,٠	٢١,٦	١٧,٣	١٣,٧	١٠,٩	٩,٣٩	٨,٢٣	٧,٠١	٦,٢٦
١٩	٣٨,٦	٣٦,٢	٣٢,٩	٣٠,١	٢٧,٢	٢٢,٧	١٨,٣	١٤,٦	١١,٧	١٠,١	٨,٩١	٧,٦٣	٦,٨٤
٢٠	٤٠,٠	٣٧,٦	٣٤,٢	٣١,٤	٢٨,٤	٢٣,٨	١٩,٣	١٥,٥	١٢,٤	١٠,٩	٩,٥٩	٨,٢٦	٧,٤٣
٢١	٤١,٤	٣٨,٩	٣٥,٥	٣٢,٧	٢٩,٦	٢٤,٩	٢٠,٣	١٦,٣	١٣,٢	١١,٦	١٠,٣	٨,٩٠	٨,٠٣
٢٢	٤٢,٨	٤٠,٣	٣٦,٨	٣٣,٩	٣٠,٨	٢٦,٠	٢١,٣	١٧,٢	١٤,٠	١٢,٣	١١,٠	٩,٥٤	٨,٦٤
٢٣	٤٤,٢	٤١,٦	٣٨,١	٣٥,٢	٣٢,٠	٢٧,١	٢٢,٣	١٨,١	١٨,٤	١٣,١	١١,٧	١٠,٢	٩,٢٦
٢٤	٤٥,٦	٤٣,٠	٣٩,٤	٣٦,٤	٣٣,٢	٢٨,٢	٢٣,٣	١٩,٠	١٥,٧	١٣,٨	١٢,٤	١٠,٩	٩,٨٩
٢٥	٤٦,٩	٤٤,٣	٤٠,٦	٣٧,٧	٣٤,٤	٢٩,٣	٢٤,٣	١٩,٩	١٦,٥	١٤,٦	١٣,١	١١,٥	١٠,٥
٢٦	٤٨,٣	٤٥,٦	٤١,٩	٣٨,٩	٣٥,٦	٣٠,٤	٢٥,٣	٢٠,٨	١٧,٣	١٥,٤	١٣,٨	١٢,٢	١١,٢
٢٧	٤٩,٦	٤٧,٠	٤٣,٢	٤٠,١	٣٦,٧	٣١,٥	٢٦,٣	٢١,٧	١٨,١	١٦,٢	١٤,٦	١٢,٩	١١,٨

جدول (٧)

(توزيع D) : القيم داخل الجدول هى القيمة الحرجة $د^{\alpha}_{ن}$ لاختبار كولومجروف سيمنروف.

∝ / ن	,١٠	,٠٥	,٠٢٥	,٠١	,٠٠٥
١	,٩٠	,٩٥٠	,٩٧٥	,٩٩٠	,٩٩٥
٢	,٦٨٤	,٧٧٦	,٨٤٢	,٩٠٠	,٩٢٩
٣	,٥٦٥	,٦٣٦	,٧٠٨	,٧٨٥	,٨٢٩
٤	,٤٩٣	,٥٦٥	,٦٢٤	,٦٨٩	,٧٣٤
٥	,٤٤٧	,٥٠٩	,٥٦٣	,٦٢٧	,٦٦٩
٦	,٤١٠	,٤٦٨	,٥١٩	,٥٧٧	,٦١٦
٧	,٣٨١	,٤٣٦	,٤٨٣	,٥٣٨	,٥٧٦
٨	,٣٥٨	,٤١٠	,٤٥٤	,٥٠٧	,٥٤٢
٩	,٣٣٩	,٣٨٧	,٤٣٠	,٤٨٠	,٥١٣
١٠	,٣٢٣	,٣٦٩	,٤٠٩	,٤٥٧	,٤٨٩
١١	,٣٠٨	,٣٥٢	,٣٩١	,٤٣٧	,٤٦٨
١٢	,٢٩٦	,٣٣٨	,٣٧٥	,٤١٩	,٤٤٩
١٣	,٢٨٥	,٣٢٦	,٣٦١	,٤٠٤	,٤٣٣
١٤	,٢٧٥	,٣١٤	,٣٤٩	,٣٩٠	,٤١٨
١٥	,٢٦٦	,٣٠٤	,٣٣٨	,٣٧٧	,٤٠٤
١٦	,٢٥٨	,٢٩٥	,٣٢٧٣	,٣٦٦	,٣٩٢
١٧	,٢٥٠	,٢٨٦	,٣١٨	,٣٥٥	,٣٨١
١٨	,٢٤٤	,٢٧٩	,٣٠٩	,٣٤٦	,٣٧٠٦
١٩	,٢٣٧	,٢٧١	,٣٠١	,٣٣٧	,٣٦١
٢٠	,٢٣٢	,٢٦٥	,٢٩٤	,٣٢٩	,٣٥٢

جدول (٨)

البحد الادنـــى والاعلـــى لاختبـار الـدورة

القيـم الـحرجة لـلحد الادنى

n_1 \ n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2											2	2	2	2	2	2	2	2	2
3					2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
4				2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
5			2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5
6		2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6
7		2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
8		2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7
9		2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
10		2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9
11		2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9
12	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
13	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10
14	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11
15	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12
16	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12
17	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	13
18	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13
19	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	13
20	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	13	14

القيـم الـحرجة لـلحد الاعلى

n_1 \ n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2																			
3																			
4				9	9														
5			9	10	10	11	11												
6			9	10	11	12	12	13	13	13	13								
7				11	12	13	13	14	14	14	14	15	15	15					
8				11	12	13	14	14	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	17
9					13	14	14	15	16	16	16	17	17	18	18	18	18	18	18
10					13	14	15	16	16	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20
11					13	14	15	16	17	17	18	19	19	19	20	20	20	21	21
12					13	14	16	16	17	18	19	19	20	20	21	21	21	22	22
13						15	16	17	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23
14						15	16	17	18	19	20	20	21	22	22	23	23	23	24
15						15	16	18	18	19	20	21	22	22	23	23	24	24	25
16							17	18	19	20	21	21	22	23	23	24	25	25	25
17							17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	25	26	26
18							17	18	19	20	21	22	23	24	25	25	26	26	27
19							17	18	20	21	22	23	23	24	25	26	26	27	27
20							17	18	20	21	22	23	24	25	25	26	27	27	28

جدول (٩)

جـــدول اختبار مـــان ويتـــــنى

n_1	p	$n_2=2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.005	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
	.01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2
	.025	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	.05	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5
	.10	0	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8
3	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	.005	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4
	.01	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6
	.025	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
	.05	0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	12
	.10	1	2	2	3	4	5	6	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14	15	16
4	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4
	.005	0	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	7	8	9
	.01	0	0	0	1	2	2	3	4	4	5	6	6	7	9	8	9	10	10	11
	.025	0	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	12	13	14	15
	.05	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19
	.10	1	2	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19	21	22	23
5	.001	0	0	0	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8
	.005	0	0	0	1	2	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14
	.01	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	.025	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	18	19	20	21
	.05	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23	24	26
	.10	2	3	5	6	8	9	11	13	14	16	18	19	21	23	24	26	28	29	31
6	.001	0	0	0	0	0	0	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	.005	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19
	.01	0	0	2	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23
	.025	0	2	3	4	6	7	9	11	12	14	15	17	18	20	22	23	25	26	28
	.05	1	3	4	6	8	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	27	29	31	33
	.10	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	35	37	39
7	.001	0	0	0	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17
	.005	0	0	1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17	19	20	22	23	25
	.01	0	1	2	4	5	7	8	10	12	13	15	17	18	20	22	24	25	27	29
	.025	0	2	4	6	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
	.05	1	3	5	7	9	12	14	16	18	20	22	25	27	29	31	34	36	38	40
	.10	2	5	7	9	12	14	17	19	22	24	27	29	32	34	37	39	42	44	47
8	.001	0	0	0	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22
	.005	0	0	2	3	5	7	8	10	12	14	16	18	19	21	23	25	27	29	31
	.01	0	1	3	5	7	8	10	12	14	16	18	21	23	25	27	29	31	33	35
	.025	1	3	5	7	9	11	14	16	18	20	23	25	27	30	32	35	37	39	42
	.05	2	4	6	9	11	14	16	19	21	24	27	29	32	34	37	40	42	45	48
	.10	3	6	8	11	14	17	20	23	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55

تابع جدول (٩)

n_1	p	$n_2=2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
9	.001	0	0	0	2	3	4	6	8	9	11	13	15	16	18	20	22	24	26	27
	.005	0	1	2	4	6	8	10	12	14	17	19	21	23	25	28	30	32	34	37
	.01	0	2	4	6	8	10	12	15	17	19	22	24	27	29	32	34	37	39	41
	.025	1	3	5	8	11	13	16	18	21	24	27	29	32	35	38	40	43	46	49
	.05	2	5	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
	.10	3	6	10	13	16	19	23	26	29	32	36	39	42	46	49	53	56	59	63
10	.001	0	0	1	2	4	6	7	9	11	13	15	18	20	22	24	26	28	30	33
	.005	0	1	3	5	7	10	12	14	17	19	22	25	27	30	32	35	38	40	43
	.01	0	2	4	7	9	12	14	17	20	23	25	28	31	34	37	39	42	45	48
	.025	1	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	34	37	40	43	46	49	53	56
	.05	2	5	8	12	15	18	21	25	28	32	35	38	42	45	49	52	56	59	63
	.10	4	7	11	14	18	22	25	29	33	37	40	44	48	52	55	59	63	67	71
11	.001	0	0	1	3	5	7	9	11	13	16	18	21	23	25	28	30	33	35	38
	.005	0	1	3	6	8	11	14	17	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49
	.01	0	2	5	8	10	13	16	19	23	26	29	32	35	38	42	45	48	51	54
	.025	1	4	7	10	14	17	20	24	27	31	34	38	41	45	48	52	56	59	63
	.05	2	6	9	13	17	20	24	28	32	35	39	43	47	51	55	58	62	66	70
	.10	4	8	12	16	20	24	28	32	37	41	45	49	53	58	62	66	70	74	79
12	.001	0	0	1	3	5	8	10	13	15	18	21	24	26	29	32	35	38	41	43
	.005	0	2	4	7	10	13	16	19	22	25	28	32	35	38	42	45	48	52	55
	.01	0	3	6	9	12	15	18	22	25	29	32	36	39	43	47	50	54	57	61
	.025	2	5	8	12	15	19	23	27	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70
	.05	3	6	10	14	18	22	27	31	35	39	43	48	52	56	61	65	69	73	78
	.10	5	9	13	18	22	27	31	36	40	45	50	54	59	64	68	73	78	82	87
13	.001	0	0	2	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	43	46	49
	.005	0	2	4	8	11	14	18	21	25	28	32	35	39	43	46	50	54	58	61
	.01	1	3	6	10	13	17	21	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
	.025	2	5	9	13	17	21	25	29	34	38	42	46	51	55	60	64	68	73	77
	.05	3	7	11	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	66	71	76	81	85
	.10	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	69	75	80	85	90	95
14	.001	0	0	2	4	7	10	13	16	20	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55
	.005	0	2	5	8	12	16	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	64	68
	.01	1	3	7	11	14	18	23	27	31	35	39	44	48	52	57	61	66	70	74
	.025	2	6	10	14	18	23	27	32	37	41	46	51	56	60	65	70	75	79	54
	.05	4	8	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	78	83	88	93
	.10	5	11	16	21	26	32	37	42	48	53	59	64	70	75	81	86	92	98	103
15	.001	0	0	2	5	8	11	15	18	22	25	29	33	37	41	44	48	52	56	60
	.005	0	3	6	9	13	17	21	25	30	34	38	43	47	52	56	61	65	70	74
	.01	1	4	8	12	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	67	71	76	81
	.025	2	6	11	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	71	76	81	86	91
	.05	4	8	13	19	24	29	34	40	45	51	56	62	67	73	78	84	89	95	101
	.10	6	11	17	23	28	34	40	46	52	58	64	69	75	81	87	93	99	105	111
16	.001	0	0	3	6	9	12	16	20	24	28	32	36	40	44	49	53	57	61	66
	.005	0	3	6	10	14	19	23	28	32	37	42	46	51	56	61	66	71	75	80
	.01	1	4	8	13	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	77	83	88
	.025	2	7	12	16	22	27	32	38	43	48	54	60	65	71	76	82	87	93	99
	.05	4	9	15	20	26	31	37	43	49	55	61	66	72	78	84	90	96	102	108
	.10	6	12	18	24	30	37	43	49	55	62	68	75	81	87	94	100	107	113	120

تابع جدول (٩)

n_1	p	$n_2=2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
17	.001	0	1	3	6	10	14	18	22	26	30	35	39	44	48	53	58	62	67	71
	.005	0	3	7	11	16	20	25	30	35	40	45	50	55	61	66	71	76	82	87
	.01	1	5	9	14	19	24	29	34	39	45	50	56	61	67	72	78	83	89	94
	.025	3	7	12	18	23	29	35	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106
	.05	4	10	16	21	27	34	40	46	52	58	65	71	78	84	90	97	103	110	116
	.10	7	13	19	26	32	39	46	53	59	66	73	80	86	93	100	107	114	121	128
18	.001	0	1	4	7	11	15	19	24	28	33	38	43	47	52	57	62	67	72	77
	.005	0	3	7	12	17	22	27	32	38	43	48	54	59	65	71	76	82	88	93
	.01	1	5	10	15	20	25	31	37	42	48	54	60	66	71	77	83	89	95	101
	.025	3	8	13	19	25	31	37	43	49	56	62	68	75	81	87	94	100	107	113
	.05	5	10	17	23	29	36	42	49	56	62	69	76	83	89	96	103	110	117	124
	.10	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	78	85	92	99	107	114	121	129	136
19	.001	0	1	4	8	12	16	21	26	30	35	41	46	51	56	61	67	72	78	83
	.005	1	4	8	13	18	23	29	34	40	46	52	58	64	70	75	82	88	94	100
	.01	2	5	10	16	21	27	33	39	45	51	57	64	70	76	83	89	95	102	108
	.025	3	8	14	20	26	33	39	46	53	59	66	73	79	86	93	100	107	114	120
	.05	5	11	18	24	31	38	45	52	59	66	73	81	88	95	102	110	117	124	131
	.10	8	15	22	29	37	44	52	59	67	74	82	90	98	105	113	121	129	136	144
20	.001	0	1	4	8	13	17	22	27	33	38	43	49	55	60	66	71	77	83	89
	.005	1	4	9	14	19	25	31	37	43	49	55	61	68	74	80	87	93	100	106
	.01	2	6	11	17	23	29	35	41	48	54	61	68	74	81	88	94	101	108	115
	.025	3	9	15	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	99	106	113	120	128
	.05	5	12	19	26	33	40	48	55	63	70	78	85	93	101	108	116	124	131	139
	.10	8	16	23	31	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111	120	128	136	144	152

قائمة المراجع

أولاً: المراجع العربية

١- **سمير كامل عاشور، سامية أبو الفتوح سالم (١٩٩٥)**، الاختبارات اللامعلمية، معهد الدراسات والبحوث الإحصائية، القاهرة.

٢- **عثمان على شلبى، أنور على جوده (١٩٩٧)**، الإحصاء التطبيقى، مكتبة المدينة، الزقازيق.

٣- **محمد عبد السميع عنانى، ابراهيم موسى عبد الفتاح (١٩٩٨)**، مقدمة فىالإحصاء التطبيقى، المكتبة العلمية، الزقازيق.

٤- **محمد فتحى محمد على (١٩٨٤)**، الإحصاء المتقدم، مكتبة عين شمس، القاهرة.

ثانياً: المراجع الأجنبية:

1- **Daniel, W.W. (1978),** Applied Non-Parametric Statistics, Houghton Mifflin Company.

2- **Frank, H. and Althoes, S. (1994),** Statistics-Concepts and Applications, Cambridge University Press.

3- **Kohler,H. (1994),** Statistics for Business and Economics, Harper Collins College Publishers, U.S.A.

الجزء الثانى

- الأرقام القياسية.
- الضبط الإحصائي لجودة الإنتاج.
- الإحصاء الديموجرافى.
- الانحدار الخطى المتعدد

الباب الأول
الأرقام القياسية

Index Numbers

تمهيد:

تتغير كثير من الظواهر من فترة زمنية إلى أخرى ومن مكان إلى آخر. فأسعار السلع، وأجور العمال، والصادرات والواردات ..... الخ تتغير من وقت إلى آخر ومن مكان إلى آخر. ويكون من المفيد الوصول إلى رقم يقيس التغيرات التى تطرأ على هذه الظواهر ويفيد فى مقارنة قيمة الظاهرة فى زمان (أو مكان) معين بقيمتها (أو المقياس) لقياس التغير فى مجموعة مرتبطة من الظواهر كأسعار المواد الغذائية مثلا من فترة زمنية (أو منطقة جغرافية) إلى فترة زمنية أخرى.

فبعض أسعار المواد الغذائية ترتفع. والبعض الأخر قد ينخفض، بينما تظل أسعار مجموعة ثالثة ثابتة، كما أن الزيادة أو النقصان التى تحدث لا تكون -غالبا- بنفس المعدل. ويكون الهدف هو قياس التغير الذى يطرأ على أسعار السلع الغذائية ككل أو كمجموعة واحدة.

ويسمى الرقم – أو المقياس– الذى يستخدم لقياس التغير فى مختلف الظواهر بالرقم القياسى.

تعريف الرقم القياسى:-

يمكن تعريف الرقم القياسى كما يلى:

الرقم القياسى هو رقم نسبى يقيس التغير الذى يطرأ على ظاهرة أو مجموعة مرتبطة من الظواهر بين فترتين زمنيتين أو منطقتين جغرافيتين مختلفتين.

فالرقم القياسى ينسب قيمة الظاهرة (أو الظواهر) فى فترة زمنية ما تسمى بفترة المقارنة إلى فترة زمنية أخرى تسمى بفترة الأساس. أو ينسب قيمة الظاهرة (أو الظواهر) فى منطقة جغرافية ما تسمى بمنطقة المقارنة إلى قيمتها فى منطقة جغرافية أخرى تسمى بمنطقة الأساس.

وباختصار فإن الرقم القياسى يقيس التغير النسبى فى قيم الظواهر من وقت لآخر أو من مكان لآخر. وتستخدم الأرقام القياسية فى مجالات كثيرة وبصفة خاصة فى المجالات الاقتصادية.

وفى هذا الجزء سوف نركز على الأرقام القياسية التى تهدف إلى قياس التغير فى الأسعار أو فى الكميات بالنسبة للزمن. وسوف نفترض أن الزمن هو سنة فنقول سنه الأساس وسنة المقارنة. وبالتالى فإن هدفنا هو تركيب الأرقام القياسية للأسعار والكميات.

مثال (١)

إذا كان سعر سلعة ما هو ٨ جنيه فى سنة ١٩٨٥ وأصبح ١٠ جنيه فى سنة ١٩٩٠م فإن الرقم القياسى للسعر فى سنة ١٩٩٠ بالنسبة لسنة ١٩٨٥ كأساس هو:

$$\frac{١٠}{٨} \times ١٠٠ = ١٢٥ \%$$

وهذا المثال يوضح لنا النقاط التالية:

(أ) أن هناك دائما سنة أساس ينسب إليها التغير. وسنة الاساس فى هذا المثال هى سنة ١٩٨٥.

(ب) أن سنة المقارنة هى السنه التى يراد قياس التغير فيها أو تكوين الرقم القياسى لها. وهى فى هذا المثال سنة ١٩٩٠.

(جـ) أن الرقم القياسى يحسب كنسبة مئوية بقسمة السعر أو الكمية فى سنة المقارنة على السعر أو الكمية فى سنة الأساس ثم ضرب الناتج فى ١٠٠.

(د) تفسير النتيجة السابقة هو: بافتراض أن السعر فى سنة الاساس (١٩٨٥) هو ١٠٠ جنيه فإنه فى سنة المقارنة (١٩٩٠) أصبح ١٢٥ جنيه وهذا يعنى أنه قد حدثت زيادة فى السعر مقدارها ٢٥ جنيه.

والرقم السابق هو أبسط صور الأرقام القياسية وذلك عندما يكون لدينا سلعة واحدة. ولذا فانه يسمى "منسوب السعر". ولكن كما سوف نرى فإن الأرقام القياسية تحتوى فى الغالب على أكثر من سلعة واحدة. وقبل الدخول

فى تفاصيل تركيب الأرقام القياسية للأسعار يفضل أولا الاجابة على بعض الأسئلة مثل:

- كيف يتم إختيار سنة الأساس؟
- ما هى البنود (أو السلع) التى تدخل فى تركيب الرقم القياسى؟
- وفيما يلى نحاول الاجابة على هذين السؤالين.

اختيار فترة (أو سنة) الاساس:-

تكون فترة الاساس فى العادة فترة سابقة لفترة المقارنة (ولكن ليس هذا بالضرورة هو الحال دائما). وجرت العادة على اعتبار فترة الأساس سنة فنقول سنة الأساس وكذلك على إعتبار فترة المقارنة على أنها سنة فنقول سنة المقارنة.

وسنة الاساس هى السنة التى ينسب إليها التغير، لذلك فإن سنة الاساس يجب أن تتميز بما يلى:

١- أن تكون سنة متميزة بالاستقرار الاقتصادى وليس بها أى ظروف غير طبيعية كالحروب والزلازل والفياضانات والازمات الاقتصادية ..... الخ.

٢- ألا تكون بعيدة نسبيا عن سنة المقارنة حتى لاتختلف الظروف كلية بين سنتى المقارنة والاساس وبالتالى لا يفقد الرقم القياسى أهميته. فليس منطقيا - على سبيل المثال - استخدام اسعار سنة ١٩٥٠م كأساس لتكوين رقم قياس سنة ١٩٩٠م.

٣- قد يفضل فى بعض الحالات استخدام متوسط أسعار أو متوسط الكميات عدة سنوات لتعبر عن أسعار أو كميات سنة الاساس. وخصوصا إذا كانت سنة الاساس هذه سوف تستخدم كأساس ثابت ينسب إليها أسعار أو كميات عدة سنوات أخرى.

وأحيانا أخرى يفضل استخدام السنة السابقة مباشرة كسنة أساس. أى تنسب الاسعار أو الكميات فى كل سنة إلى أسعار أو كميات السنة السابقة لها مباشرة. أى يستخدم الاساس المتحرك لحساب الرقم القياسى.

وأيا كان الاساس - ثابتا أو متحرك - يجب إعادة النظر كل مدة فى سنة الاساس وذلك لظهور سلع جديدة باستمرار لم تكن موجودة من قبل وكذلك لتغير عادات وأنماط الاستهلاك ولنقصان أهمية بعض السلع مع مضى الزمن أو ظهور سلع منافسة لها وأفضل منها.

اختيار البنود (أو السلع) التى يتركب منها الرقم القياسى:-

ذكرنا سابقا أن الرقم القياسى يتركب غالبا من عدة بنود أو عدة سلع، فإذا أردنا - مثلا - تكوين الرقم القياسى لأسعار المواد الغذائية، أو لاسعار الجملة، أو .... الخ نجد أن أمامنا عشرات السلع والتى يجب الاختيار من بينها، بل وقد يكون للسلعة الواحدة عدة أنواع مختلفة. وعند اختيار السلع التى تدخل فى تركيب الأرقام القياسية يجب مراعاة ما يلى:

١- أن تكون البنود أو السلع متماثلة بين سنتى الاساس والمقارنة حتى تكون عملية المقارنة صحيحة.

٢- التركيز على السلع الهامة والتى تمتص الجزء الأكبر من الإنفاق، مع مراعاة عدم تكرار بعض السلع (أو البنود) باشكال مختلفة.

٣- للتغلب على مشكلة اختلاف سعر نفس السلعة من مدينة إلى أخرى، بل وفى نفس المدينة حسب الاسواق وموقعها ونوع الخدمة .... ، يؤخذ متوسط أسعار كل سلعة من عدة مواقع.

٤- مراعاة أن تكون بنود كل سلعة متشابهة كمجموعة سلع اللحوم، مجموعة سلع الخضروات، مجموعة سلع الفاكهة، مجموعة سلع الحبوب ... وغيرها من البنود الاخرى المتشابهة.

وعموما فان اختيار البنود التى يتركب منها الرقم القياسى يتوقف على الغرض الذى من أجله يتم تركيب الرقم القياسى.

طرق تركيب الأرقام القياسية بأساس ثابت:-

هناك عدة أرقام قياسية للأسعار تعتمد فى تركيبها أما على الاسلوب التجميعى (البسيط أو المرجح) واما على اسلوب المناسيب (البسيط والمرجح) ونتناول بالتفصيل فيما يلى أهم هذه الأرقام.

أولا: الاسلوب التجميعى :

وفى هذا الاسلوب نقوم بتجميع أسعار السلع فى سنة المقارنة ثم نقوم بقسمة ذلك المجموع على مجموع أسعار نفس السلع فى سنة الاساس ويضرب الناتج فى ١٠٠.

أى أن الأسعار فى سنة ١٩٩٦ زادت - فى المتوسط - بمعدل ١٦,٦٧ ٪ عما كانت عليه فى عام ١٩٩٠.

على الرغم من أن هذا الرقم يعتبر أبسط رقم قياسى يمكن استخدامه لقياس التغير فى مستوى الأسعار إلا أنه يعانى من عيبين أساسيين هما:

١- أنه لا يعطى كل سلعة الأهمية النسبية التى تستحقها. فهو يساوى السلع فى الأهمية النسبية الامر الذى لا يتفق مع الواقع. فسلعة مثل الحليب أو اللحوم تختلف بكل تأكيد عن سلعة مثل السمسم أو معجون الأسنان حيث تختلف السلع فيما تمثله فى ميزانية الأسرة أو فى الانفاق عليها.

٢- اختلاف وحدات القياس التى بناء عليها يتم تحديد أسعار السلع. فالسعر لبعض السلع يحسب بالكيلو والبعض الآخر بالعلبة أو الكرتونة أو الكيس .... الخ، فهو لا يراعى اختلاف وحدات قياس السلع الداخلة فيه. فقد يؤخذ سعر كيلو السكر بينما يؤخذ سعر الطن من الفحم وبالتالى فإن تغير سعر الكيلو من السكر قد لا يؤثر تأثيرا محسوسا على الرقم القياسى، بينما أى تغير ولو طفيف فى سعر طن الفحم قد يكون له تأثير كبير على الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار.

ولتلافى هذه العيوب تعطى كل سلعة وزنا يعبر عن أهميتها النسبية. والأوزان أو الترجيحات التى تعطى لأسعار السلع هى الكميات المنتجة أو المستهلكة من كل سلعة. وبالتالى يكون لدينا أرقام قياسية تجميعية للأسعار مرجحة بالكميات. وهو ما سوف نتناوله فى الفقرات التالية:

(٢) الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة الاساس (رقم لاسبير):-

اقترح "لاسبير" ان تكون الأوزان أو الترجيحات التى تعطى لأسعار السلع هى كميات سنة الاساس. فاذا رمزنا لكميات سنة الاساس بالرمز $ك_٠$. فإن رقم لاسبير أو الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة الاساس هو:

$$\text{رقم لاسبير} = \frac{\text{مجـ } ع_{١}\, ك_{٠}}{\text{مجـ } ع_{٠}\, ك_{٠}} \times ١٠٠ \qquad \leftarrow (٢)$$

فرقم لاسبير يفترض ان كميات سنة الاساس هى الأوزان أو الترجيحات المناسبة التى تعطى لأسعار السلع. وإن كان البعض يعترض على ذلك على أساس أن أذواق المستهلكين لا تظل ثابتة من سنة الاساس إلى سنة المقارنة حيث يؤدى ارتفاع وانخفاض الاسعار إلى تحول المستهلكين من سلعة إلى أخرى وبالتالى تتغير الكميات المستهلكة من سلعة ما من سنة لأخرى.

(٣) الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة المقارنة (رقم باش):-

اقترح "باش" أن تكون الترجيحات باستخدام كميات سنة المقارنة على اعتبار أن هذه الكميات هى التى تعكس أذواق المستهلكين وأنماط الاستهلاك الحالية. فاذا رمزنا لكميات سنة المقارنة بالرمز $ك_١$ فإن الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة المقارنة هو:

$$\text{رقم باش} = \frac{\text{مجـ } ع_{١}\, ك_{١}}{\text{مجـ } ع_{٠}\, ك_{١}} \times ١٠٠ \qquad \leftarrow (٣)$$

والتجميع -كما سوف نرى- قد يكون تجميعا بسيطا للاسعار أو تجميعا مرجحا بالكميات.

وفيما يلى نتناول الارقام القياسية التجميعية للاسعار.

(١) الرقم التجميعى البسيط للاسعار:

يعتبر الرقم التجميعى البسيط للاسعار أسهل وأبسط الارقام القياسية التجميعية للاسعار، حيث يتم قسمة مجموع اسعار السلع فى سنة المقارنة على مجموع أسعار نفس السلع فى سنة الأساس وضرب الناتج فى ١٠٠ أى أن.

$$\text{الرقم التجميعى البسيط للأسعار} = \frac{\text{مجموع أسعار سنة المقارنة}}{\text{مجموع أسعار سنة الاساس}} \times ١٠٠$$

فإذا رمزنا للسعر فى سنة الاساس بالرمز ع. و للسعر فى سنة المقارنه بالرمز ع١ واستخدمنا الرمز "مجـ" للدلالة على المجموع فإنه يمكن كتابة الرقم السابق باختصار كما يلى:

$$\text{الرقم التجميعى البسيط للأسعار} = \frac{\text{مجـ ع١}}{\text{مجـ ع.}} \times ١٠٠ \quad \leftarrow (١)$$

مثال (٣)

يمثل الجدول التالى أسعار ثلاث سلع بالجنيه فى عامى ١٩٩٠، ١٩٩٦م. والمطلوب حساب الرقم القياسى التجميعى البسيط لأسعار سنة ١٩٩٦ باستخدام أسعار سنة ١٩٩٠ كأساس.

السلعة	الأسعار	
	١٩٨٠	١٩٨٦
البيض	١٢	٩
السكر	١٠	١٥
اللحوم	١٤	١٨
المجموع	٣٦	٤٢

الحل

الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار = $\frac{\text{مجـ ع}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}} \times ١٠٠$

وحيث أن سنة ١٩٩٦ هى سنة المقارنة وسنة ١٩٩٠ هى سنة الأساس:

∴ $\text{مجـ ع}_{١}$ = ٤٢ ، $\text{مجـ ع}_{٠}$ = ٣٦

∴ الرقم التجميعى البسيط للأسعار = $\frac{٤٢}{٣٦} \times ١٠٠$ = ١١٦,٦٧ ٪

وإن كان البعض يعترض هنا أيضا على افتراض باش بان المستهلك يشترى فى سنة الاساس نفس الكميات من السلع التى يشتريها فى سنة المقارنة.

(٤) الرقم التجميعى المرجح بمتوسط (أو مجموع) الكميتين:-

(رقم مارشال - ادجورث)

استخدم مارشال وادجورث الوسط الحسابى (أو مجموع) الكميات فى سنتى الاساس والمقارنة وذلك للتغلب على عيوب كل من رقمى "لاسبير" و "باش"

وبالتالى فإن رقم مارشال - ادجورث هو:

$$\text{رقم مارشال - ادجورث} = \frac{\text{مجـ ع}_{١}\,(\text{ك}_{٠} + \text{ك}_{١})}{\text{مجـ ع}_{٠}\,(\text{ك}_{٠} + \text{ك}_{١})} \times ١٠٠ \quad \leftarrow (٤)$$

ونلاحظ أن هذا الرقم هو نفسه لو كتب بالشكل التالى:

$$\frac{\text{مجـ ع}_{١}\left(\frac{\text{ك}_{٠} + \text{ك}_{١}}{٢}\right)}{\text{مجـ ع}_{٠}\left(\frac{\text{ك}_{٠} + \text{ك}_{١}}{٢}\right)} \times ١٠٠$$

حيث يمكن اختصار ٢ من كل من البسط والمقام فنحصل على نفس الرقم

وقد اقترح البعض استخدام الوسط الهندسى للكميات بدلا من الوسط الحسابى وبالتالى فإنه يمكن الحصول على رقم قياسى آخر.

(٥) الرقم القياسي الأمثل لأسعار (رقم فيشر):-

وهذا الرقم هو الوسط الهندسي لرقمى لاسبير وباش (أى هو الجذر التربيعى لحاصل ضرب رقمى لاسبير وباش) أى أن رقم فيشر أو الرقم القياسى الأمثل هو أفضل الأرقام القياسية التى تستخدم لقياس درجة التغير فى الأسعار أو الكميات فى سنة المقارنة بالنسبة لأسعار وكميات سنة الأساس، أى أن رقم فيشر للأسعار يعرف بالعلاقة التالية:

$$\text{رقم فيشر الأمثل للأسعار} = \sqrt{\frac{\text{مجـ } ع_1 ك_0}{\text{مجـ } ع_0 ك_0} \times \frac{\text{مجـ } ع_1 ك_1}{\text{مجـ } ع_0 ك_1}} \times ١٠٠$$

(٥) ←

وباختصار فإن:

$$\text{رقم فيشر} = \sqrt{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باش}} \times ١٠٠$$

وسمى رقم فيشر بالرقم الأمثل للأسعار لأنه يتغلب على عيوب رقمى لاسبير وباش ولسبب آخر أكثر أهمية هو انه يجتاز الاختبارات المختلفة للأرقام القياسية والتى سوف نتناولها بالتفصيل فيما بعد.

مثال (٣)

الجدول التالى يمثل أسعار وكميات مجموعة من السلع فى سنتى ١٩٩٣، ١٩٩٧ ، والمطلوب حساب الأرقام القياسية التالية للأسعار لعام ١٩٩٧م باعتبار سنة ١٩٩٣ كأساس:

أ- رقم لاسبير ب- رقم باش جـ- رقم فيشر

السلعة	١٩٨٣		١٩٨٧	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
أ	٣	١٠	٤	١٢
ب	٥	١٥	٧	٢٠
جـ	٨	٥	١٠	٩

الحل

لحساب أرقام لاسبير وباش وفيشر نكون الأعمدة التالية ع.ك. ، ع١ك١، ع.ك١، ع١ك. على اعتبار أن أسعار وكميات سنة ١٩٩٣ هى ع. ، ك. وأسعار وكميات سنة ١٩٩٧ هى ع١، ك١ على الترتيب

لإيجاد المطلوب ننشأ الجدول التالى

السلعة	١٩٩٣		١٩٩٧		ع.ك.	ع١ك.	ع.ك١	ع١ك١
	ع.	ك.	ع١	ك١				
أ	٣	١٠	٤	١٢	٣٠	٤٠	٣٦	٤٨
ب	٥	١٥	٧	٢٠	٧٥	١٠٥	١٠٠	١٤٠
جـ	٨	٥	١٠	٩	٤٠	٥٠	٧٢	٩٠
المجموع					١٤٥	١٩٥	٢٠٨	٢٧٨

(أ) رقم لاسبير $= \frac{\text{مجـ ع١ ك.}}{\text{مجـ ع. ك.}} \times ١٠٠ = \frac{١٩٥}{١٤٥} \times ١٠٠ = ١٣٤,٤٨\%$

(ب) رقم باش $= \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ ك}_1}{\text{مجـ ع. ك}_1} \times 100 = \frac{278}{208} \times 100 = 133.65\%$

(جـ) رقم فيشر $= \sqrt{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باش}}$

$= \sqrt{134.48 \times 133.65} = 134.06\%$

مثال (٤)

لبيانات المثال السابق، احسب رقم مارشال-ادجورث للأسعار .

الحل

للحصول على المطلوب ننشئ الجدول التالي

ع.	ع١	(ك. + ك١)	ع. (ك. + ك١)	ع١ (ك. + ك١)
٣	٤	١٠ + ١٢ = ٢٢	٣ × ٢٢ = ٦٦	٤ × ٢٢ = ٨٨
٥	٧	١٥+٢٠ = ٣٥	٥ × ٣٥ = ١٧٥	٧ × ٣٥ = ٢٤٥
٨	١٠	٥ + ٩ = ١٤	٨ × ١٤ = ١١٢	١٠ × ١٤ = ١٤٠
			٣٥٣	٤٧٣

رقم مارشال – ادجورث $= \frac{\text{مجـ ع}_1 (\text{ك.} + \text{ك}_1)}{\text{مجـ ع.} (\text{ك.} + \text{ك}_1)} \times 100$

$= \frac{473}{353} \times 100 = 133.99\%$

ثانيا: الارقام القياسية النسبية:

(١) الرقم القياسى النسبى البسيط:

يعرف الرقم القياسى النسبى البسيط بأنه متوسط الأرقام القياسية البسيطة لمجموعة من السلع وضرب الناتج فى ١٠٠ أى أن:

$$\text{الرقم القياسى النسبى البسيط} = \frac{١}{ن} \text{ مجـ } \left(\frac{ع_١}{ع_٠}\right) \times ١٠٠ \quad \leftarrow (٦)$$

حيث "ن" عبارة عن عدد السلع الداخلة فى تركيب الرقم القياسى النسبى البسيط

ويمكن حساب الرقم القياسى النسبى لمثال (٢) كالآتى:

$$\text{الرقم القياسى النسبى البسيط لأسعار ١٩٩٦} = \frac{١}{ن} \text{ مجـ } \left(\frac{ع_١}{ع_٠}\right) \times ١٠٠$$

$$= \frac{١}{٣} \times \left(\frac{٩}{١٢} + \frac{١٥}{١٠} + \frac{١٨}{١٤}\right) \times ١٠٠$$

$$= \frac{١}{٣} \times (٠,٧٥ + ١,٥ + ١,٢٩) \times ١٠٠ = ١١٨\%$$

بينما الرقم القياسى التجميعى البسيط ١١٦,٦٧٪

ويلاحظ هنا أننا اعطينا نفس الأهمية النسبية لجميع السلع الداخلة فى حساب الرقم القياسى وهذا ليس صحيحا دائما.

(٢) الرقم القياسى النسبى المرجح بكميات سنة الأساس:-

ويمكن حساب هذا الرقم باستخدام العلاقة التالية:

رقم لاسبير النسبى للأسعار = مجـ (ع١ / ع٠) × ك٠ × ١٠٠

وهذا يختلف بالطبع عن الرقم القياسى المرجح بكميات سنة المقارنة والمعروف برقم لاسبير والمعرف بالمعادلة (٢).

(٣) الرقم القياسى النسبى المرجح بكميات سنة المقارنة:-

ويتم حساب ذلك الرقم باستخدام العلاقة التالية

رقم باش النسبى للأسعار = مجـ (ع١ / ع٠) × ك١ × ١٠٠

وهو أيضاً يختلف عن رقم باش للأسعار والمعرف بالمعادلة رقم (٣)

(٤) الرقم القياسى النسبى الأمثل لفيشر:-

ويعرف هذا الرقم على أنه عبارة عن الجذر التربيعى لحاصل ضرب الرقمين القياسيين النسبيين لكل من لاسبير وباش.

الرقم القياسى النسبى الأمثل لفيشر = √(مجـ (ع١ / ع٠) ك٠ × مجـ (ع١ / ع٠) ك١) × ١٠٠

وهذا بالطبع يختلف عن رقم فيشر للأسعار والمعرف بالمعادلة رقم (٥)

(٥) الرقم القياسى النسبى المرجح بمتوسط كميتى سنتى الاساس والمقارنة:

ويتم حساب ذلك الرقم باستخدام العلاقة

$$\text{رقم مارشال – ادجورث} = \text{مجـ}\left(\frac{ع_1}{ع_0}\right) \times \left(\frac{ك_0 + ك_1}{2}\right) \times 100$$

وهذا يختلف بالطبع عن رقم مارشال-ادجورث والسابق تعريفه فى المعادلة رقم (٤)

للتوضيح كيفية حساب تلك الأرقام النسبية المرجحة نأخذ المثال التالى:

مثال (٥)

إذا أعطيت السلع الثلاث أ، ب، جـ أوزانا حسب أهمية كل منهم كما هو مبين بالجدول الأتى:

السلعة	اسعار عام ١٩٨٥ (ع.)	أسعار عام ١٩٩٠ (ع١)	الأوزان لعام ١٩٨٥ (ك.)	الأوزان لعام ١٩٩٠ (ك١)
أ	٤٠	١٢٠	٠.١٩	٠.١٥
ب	٦٠	٩٠	٠,٥١	٠,٦٠
جـ	٢٠	٤٠	٠,٣٠	٠.٢٥

والمطلوب حساب الأرقام القياسية المرجحة ومقارنتها بالأرقام القياسية المرجحة غير النسبية.

الحـل

لحساب تلك الأرقام نكون الجدول التالى:-

السلعة	ع.	ع١	ك.	ك١	ع١ك.	ع.ك.	ع١ك١	ع.ك١	ع١ / ع.	(ع١ / ع.) ك.	(ع١ / ع.) ك١
أ	٤٠	١٢	٠,١٩	٠,١٥	٢٢,٨	٧,٦	١٨	٦	٣	٠,٥٧	٠,٤٥
ب	٦٠	٩٠	٠,٥١	٠,٦٠	٤٥,٩	٣٠,٦	٥٤	٣٦	١,٥	٠,٧٧	٠,٩٠
جـ	٢٠	٤٠	٠,٣٠	٠,٢٥	١٢,٠	٦,٠	١٠	٥	٢,٠	٠,٦٠	٠,٥٠
مجـ	١٢٠	٢٥٠	١,٠٠	١,٠٠	٨٠,٧	٤٤,٢	٨٢	٤٧		١,٩٤	١,٨٥

الرقم القياسى التجمبعى للاسبير = (مجـ ع١ك. / مجـ ع.ك.) × ١٠٠

= (٨٠,٧ / ٤٤,٢) × ١٠٠ = ١٨٢,٥٨٪

الرقم القياسى النسبى للاسبير = مجـ (ع١ / ع.) × ك. × ١٠٠

= ١,٩٤ × ١٠٠ = ١٩٤٪

الرقم القياسى التجميعى لباش = (مجـ ع١ك١ / مجـ ع.ك١) × ١٠٠

= (٨٢ / ٤٧) × ١٠٠ = ١٧٤,٤٧٪

الرقم القياسى النسبى لباش = مجـ (ع١ / ع.) × ك١ × ١٠٠

= ١,٨٥ × ١٠٠ = ١٨٥٪

الرقم القياسي التجميعي الأمثل لفيشر = $\sqrt{\frac{\text{مجـ } ع_1ك_0}{\text{مجـ } ع_0ك_0} \times \frac{\text{مجـ } ع_1ك_1}{\text{مجـ } ع_0ك_1}} \times ١٠٠$

$= \sqrt{\frac{٨٠,٧}{٤٤,٢} \times \frac{٨٢}{٤٧}} \times ١٠٠$

= ١٧٨,٤٨٪

الرقم القياسي النسبي الأمثل لفيشر = $\sqrt{\text{مجـ}\left(\frac{ع_1}{ع_0}ك_0\right) \times \text{مجـ}\left(\frac{ع_1}{ع_0}ك_1\right)} \times ١٠٠$

= ١٨٤,٤٥٪

ويلاحظ أيضاً بالنظر إلى الجدول السابق أن السلعة أ في سنة ١٩٩٠ زادت بمقدار ثلاثة اضعاف عن سعرها في سنة ١٩٨٥ وأن السلعة ب في سنة ١٩٩٠ زادت بمقدار ونصف عن سعرها في سنة ١٩٨٥ وأن جـ زادت بمقدار الضعف عن سعرها في سنة ١٩٨٥ وهذا يفسر لنا زيادة الأرقام القياسية النسبية عن الأرقام القياسية التجميعية.

ثالثا: أسلوب المناسيب:

وفي هذا الأسلوب يتم حساب منسوب السعر لكل سلعة ثم نحسب متوسطات لهذه المناسيب سواء كان متوسطا بسيطا أو مرجحا، ويسمى الرقم القياسي في تلك الحالات بالرقم القياسي لمناسيب الأسعار. وفيما يلي نتناول هذه الأرقام بالتفصيل.

(١) المتوسط البسيط للمناسيب:

يمكن حساب الرقم القياسي بناء على متوسط بسيط لمناسيب الأسعار ، والمتوسط أما ان يكون الوسط الحسابى أو الوسط الهندسى أو الوسط التوافقى (ويمكن أيضا استخدام الوسيط أو المنوال ولكن استخدامها محدود جدا)، وإذا رمزنا لمنسوب سعر السلعة بالرمز "س" فإن منسوب السعر لكل سلعة يحسب بقسمة سعر السلعة فى سنة المقارنة $ع_١$ على سعرها فى سنة الأساس ع. وضرب الناتج فى ١٠٠ ويكون الرقم القياسى هو الوسط الحسابى أو الهندسى أو التوافقى لهذه المناسيب. وإذا فرضنا أن عدد السلع الداخلة فى تركيب الرقم هو "ن" فيكون لدينا "ن" من المناسيب هى $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$ وبالتالى فإن المتوسطات البسيطة للمناسيب هى:

أ- الوسط الحسابى للمناسيب = $\frac{\text{مجموع المناسيب}}{\text{عددها}}$ أي أن:

$$\text{الوسط الحسابى للمناسيب} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن}$$

ب- الوسط الهندسى للمناسيب = $\sqrt[ن]{\text{لحاصل ضرب المناسيب}}$

أى أن:

$$\text{الوسط الهندسى للمناسيب} = \sqrt[ن]{س_١ \times س_٢ \times .... \times س_ن}$$

جـ- الوسط التوافقى للمناسيب = مقلوب الوسط الحسابى لمقاليب المناسيب

أى أن:

$$\text{الوسط التوافقى للمناسيب} = \frac{ن}{\sum_{ر=1}^{ن} \frac{1}{س_ر}}$$

مثال (٦)

لبيانات المثال رقم (٣) احسب الوسط الحسابى، والوسط الهندسى، والوسط التوافقى لمناسيب الأسعار.

الحل

مناسيب الأسعار هى:

$س_1$ = منسوب سعر السلعة الأولى = $\frac{٤}{٣} \times ١٠٠ = ١٣٣,٣٣\%$

$س_2$ = منسوب سعر السلعة الثانية = $\frac{٧}{٥} \times ١٠٠ = ١٤٠\%$

$س_3$ = منسوب سعر السلعة الثالثة = $\frac{١٠}{٨} \times ١٠٠ = ١٢٥\%$

أ- الوسط الحسابى لمناسييب الأسعار = $\frac{١٢٥+١٤٠+١٣٣,٣٣}{٣} = ١٣٢,٧٨\%$

ب- الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار = $\sqrt[٣]{١٢٥\times١٤٠\times١٣٣,٣٣} = ١٣٢,٦٣\%$

$$\text{جـ- الوسط التوافقى لمناسيب الأسعار} = \frac{٣}{\frac{١}{١٣٣,٣٣} + \frac{١}{١٤٠} + \frac{١}{١٢٥}}$$

$$= \frac{٣}{٠,٠٠٧٥ + ٠,٠٠٧١ + ٠,٠٠٨٠} = ١٣٢,٧٤\%$$

ويلاحظ تقارب تلك المتوسطات الثلاثة للمناسيب

(٣) المتوسط المرجح للمناسيب:

نلاحظ أن المتوسطات البسيطة للمناسيب لا تفرق هى الأخرى بين مناسيب السلع المختلفة وتعاملها جميعا على أنها متساوية فى الأهمية. لذلك فإن المتوسطات البسيطة قد تعطى نتائج مضللة أو لا تعبر عن الواقع. وللتغلب على هذا العيب تستخدم أوزان وترجيحات ملائمة للمناسيب والترجيحات التى تستخدم المناسيب هى "قيم" السلع. وحيث أن القيمة تساوى حاصل ضرب السعر فى الكمية، ولدينا أسعار سنتى الأساس والمقارنة وكميات سنتى الأساس والمقارنة أى لدينا $ع_٠$ ، $ع_١$ ، $ك_٠$ ، $ك_١$ فيكون من الممكن استخدام اربعة بدائل مختلفة للقيم هى:

$ع_٠ك_٠$ ، $ع_٠ك_١$ ، $ع_١ك_٠$ ، $ع_١ك_١$

لذلك فإن الوسط الحسابى المرجح للمناسيب يمكن أن يأخذ أحد العلاقات الأربعة التالية:

أ- الوسط الحسابى للمناسيب المرجح بالقيم ($ع_٠ك_٠$)

$$\text{الوسط الحسابى المرجح للمناسيب} = \frac{\text{مجـ} \left(\frac{ع_١}{ع_٠} \times ع_٠ك_٠\right)}{\text{مجـ} (ع_٠ك_٠)} \times ١٠٠$$

وباختصار ع. من البسط نصل إلى:

$$\text{الوسط الحسابى المرجح للمناسيب} = \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_0}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_0} \times ١٠٠ = \text{رقم لاسبير}$$

ب- الوسط الحسابى للمناسيب المرجح بالقيم (ع.ك١):

$$\text{الوسط الحسابى المرجح للمناسيب} = \frac{\text{مجـ } \left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_0} \times \text{ع}_0\text{ك}_1\right)}{\text{مجـ } (\text{ع}_0\text{ك}_1)} \times ١٠٠$$

وباختصار ع. من البسط نصل إلى:

$$\text{الوسط الحسابى المرجح للمناسيب} = \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_1} \times ١٠٠ = \text{رقم باش}$$

جـ- الوسط الحسابى للمناسيب المرجح بالقيم (ع١ك.)

$$\text{الوسط الحسابى المرجح للمناسيب} = \frac{\text{مجـ } \left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_0} \times \text{ع}_1\text{ك}_0\right)}{\text{مجـ } (\text{ع}_1\text{ك}_0)} \times ١٠٠$$

د- الوسط الحسابى للمناسيب المرجح بالقيم (ع١ك١)

$$\text{الوسط الحسابى المرجح للمناسيب} = \frac{\text{مجـ } \left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_0} \times \text{ع}_1\text{ك}_1\right)}{\text{مجـ } (\text{ع}_1\text{ك}_1)} \times ١٠٠$$

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على المتوسطات الأخرى المرجحة للمناسيب.

مثال (٧)

إحسب الوسط الحسابى المرجح للمناسيب باشكاله المختلفة لبيانات المثال رقم (٣).

الحل

لحساب الوسط الحسابى المرجح للمناسيب باشكاله المختلفة نقوم بالعمليات الحسابية اللازمة كما بالجدول التالى:

ع١ / ع.	ع.ك.	ع.ك١	ع١ك.	ع١ك١	ع١ / ع. × ع.ك.	ع١ / ع. × ع.ك١	ع١ / ع. × ع١ك.	ع١ / ع. × ع١ك١
٤ / ٣	٣٠	٣٦	١٠	٤٨	٤٠	٤٨	٥٣.٣٣	٦٤
٧ / ٥	٧٥	١٠٠	١٠٥	١٤٠	١٠٥	١٤٠	١٤٧	١٩٦
١٠ / ٨	٤٠	٧٢	٥٠	٩٠	٥٠	٩٠	٦٢.٥٠	١١٢.٥
مجموع	١٤٥	٢٠٨	١٩٥	٢٧٨	١٩٥	٢٧٨	٢٦٢.٨٣	٣٧٢.٥

(أ) الوسط الحسابى للمناسيب المرجح بالقيم (ع.ك.)

$$= \frac{\text{مجـ} (\frac{ع_1}{ع_.} \times ع_.ك_.)}{\text{مجـ} (ع_.ك_.)} \times ١٠٠ = \frac{\text{مجـ } ع_1ك_.}{\text{مجـ } ع_.ك_.} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٩٥}{١٤٥} \times ١٠٠ = ١٣٤,٤٨\%$$

ويلاحظ أنه نفس رقم "لاسبير" (راجع المثال ٣).

(ب) الوسط الحسابى للمناسيب المرجح بالقيم (ع.ك١).

$$= \frac{\text{مجـ} \left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع.}} \times \text{ع.ك}_1 \right)}{\text{مجـ} \left(\text{ع.ك}_1 \right)} \times ١٠٠ = \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع.ث}_1} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٢٧٨}{٢٠٨} \times ١٠٠ = ١٣٣,٦٥٪$$

ويلاحظ أنه نفس رقم "باش" (راجع المثال ٣).

(جـ) الوسط الحسابى للمناسيب المرجح بالقيم (ع١ك.).

$$= \frac{\text{مجـ} \left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع.}} \times \text{ع.ك.} \right)}{\text{مجـ} \left(\text{ع}_1\text{ك.} \right)} \times ١٠٠ = \frac{٢٦٢,٨٣}{١٩٥} \times ١٠٠$$

$$= ١٣٤,٧٨٪$$

(د) الوسط الحسابى للمناسيب المرجح بالقيم (ع١ك١).

$$= \frac{\text{مجـ} \left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع.}} \times \text{ع}_1\text{ك}_1 \right)}{\text{مجـ} \left(\text{ع}_1\text{ك}_1 \right)} \times ١٠٠ = \frac{٣٧٢,٥}{٢٧٨} \times ١٠٠$$

$$= ١٣٣,٩٩٪$$

المفاضله بين الصيغ المختلفه للأرقام القياسية:-

رأينا فيما سبق أن هناك عدة صيغ مختلفه للأرقام القياسيه سواء البسيطة منها أو المرجحه، وليس من المتوقع طبعاً أن ينتج عن هذه الصيغ المختلفه أرقاماً متساويه في القيمه، وإلا كنا قد استغنينا عن هذا التنوع الشديد بالقليل من الصيغ. وعلى الرغم من صلاحية كل من هذه الصيغ للأرقام القياسيه في حالات خاصه تتوقف على نوع البيانات المتوفره على الهدف من الرقم القياسي، إلا أن هذه الصيغ على درجات مختلفه من الجوده، فالرقم القياسي الجيد هو ما يجتاز نوعين من الإختبارات وهما:

١- إختبار الإنعكاس في الزمن.

٢- إختبار الإنعكاس في المعامل.

وسوف نتناول الإختبارين بالتفصيل.

إختبار الإنعكاس في الزمن:-

لإختبار صلاحية الرقم القياسي للإنعكاس في الزمن نقوم بإحلال كل من فترتي الأساس والمقارنه محل الأخرى في مدلول السعر أو الكميه، أي نقوم باستبدال أسعار وكميات فترة الأساس بأسعار وكميات فترة المقارنه، وكذا استبدال أسعار وكميات فترة المقارنه بأسعار وكميات فترة الأساس، أو بعبارة فنيه أخرى نقوم باستبدال الأرقام الملحقه برموز الرقم القياسي فنستبدل رقم الأساس (٠) برقم المقارنه (١) وكذلك رقم المقارنه (١) برقم الأساس (٠)، فنحصل على ما يسمى بالبديل الزمني للرقم الأصلي.

فإذا ضربنا الرقم القياسى الأصلى فى بديله الزمنى وكان الناتج واحدا صحيحا فيقال فى هذه الحالة أن الرقم القياسى اجتاز شرط الإنعكاس فى الزمن، مع ملاحظة أنه عند اختبار الرقم القياسى نحوله من نسبة مئويه الى نسبه عاديه وذلك بقسمته على ١٠٠.

ومعنى هذا الرقم القياسى يجتاز إختبار الإنعكاس فى الزمن إذا حقق الشرط التالى:

الرقم القياسى الأصلى × بديله الزمنى = ١

أما إذا كان حاصل ضرب الرقم القياسى الأصلى فى بديله الزمنى لا يساوى الواحد الصحيح فإن هذا الرقم القياسى يكون قد فشل فى اجتياز هذا الإختبار.

وسوف نختار الآن بعض الصيغ من بين الصيغ الكثيره التى أوردناها فى الأجزاء السابقه لمعرفة أيها يجتاز هذا الإختبار وأيها يفشل فى اجتيازه.

١- الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار = $\frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع}_0}$

بديله الزمنى = $\frac{\text{مجـ ع}_0}{\text{مجـ ع}_1}$ ، بالتالى فإن:

الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار × بديله الزمنى

$$\frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_0}{\text{مجـ ع}_1} = 1$$

ومعنى ذلك أن الرقم القياسى التجميعى البسيط يجتاز إختبار الإنعكاس فى الزمن.

٢- الرقم القياسى المرجح للأسعار للاسبير = $\frac{\text{مجـ } ع_{٠} \, ك_{ر١}}{\text{مجـ } ع_{١} \, ك_{ر١}}$

بديله الزمنى = $\frac{\text{مجـ } ع_{٠} \, ك_{ر١}}{\text{مجـ } ع_{١} \, ك_{ر١}}$

ومن ثم فإن:

الرقم القياسى للأسعار للاسبير × بديله الزمنى

$$= \frac{\text{مجـ } ع_{١} \, ك_{ر٠}}{\text{مجـ } ع_{٠} \, ك_{ر٠}} \times \frac{\text{مجـ } ع_{٠} \, ك_{ر١}}{\text{مجـ } ع_{١} \, ك_{ر١}} \neq ١$$

وهذا يعنى أن الرقم القياسى للإسعار للاسبير لم يجتاز اختبار الإنعكاس فى الزمن.

٣- الرقم القياسى المرجح للأسعار لباش = $\frac{\text{مجـ } ع_{١} \, ك_{ر١}}{\text{مجـ } ع_{٠} \, ك_{ر١}}$

بديله الزمنى = $\frac{\text{مجـ } ع_{٠} \, ك_{ر٠}}{\text{مجـ } ع_{١} \, ك_{ر٠}}$

إذن:

الرقم القياسى للأسعار لباش × بديله الزمنى

$$= \frac{\text{مجـ } ع_{١} \, ك_{ر١}}{\text{مجـ } ع_{٠} \, ك_{ر١}} \times \frac{\text{مجـ } ع_{٠} \, ك_{ر٠}}{\text{مجـ } ع_{١} \, ك_{ر٠}} \neq ١$$

وهذه النتيجة تعنى أن الرقم القياسى لباش لا يحقق شرط الإنعكاس فى الزمن.

٤- الرقم القياسى المرجح للأسعار لأدجورث-مارشال = $\frac{\text{مجـ ع}_{١}\ (\text{كر}_{٠} + \text{كر}_{١})}{\text{مجـ ع}_{٠}\ (\text{كر}_{٠} + \text{كر}_{١})}$

بديله الزمنى = $\frac{\text{مجـ ع}_{٠}\ (\text{كر}_{٠} + \text{كر}_{١})}{\text{مجـ ع}_{١}\ (\text{كر}_{٠} + \text{كر}_{١})}$

الرقم القياسى للأسعار لأدجورث - مارشال × بديله الزمنى

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\ (\text{كر}_{٠} + \text{كر}_{١})}{\text{مجـ ع}_{٠}\ (\text{كر}_{٠} + \text{كر}_{١})} \times \frac{\text{مجـ ع}_{٠}\ (\text{كر}_{١} + \text{كر}_{٠})}{\text{مجـ ع}_{١}\ (\text{كر}_{١} + \text{كر}_{٠})} = ١$$

وهذا يعنى أن الرقم القياسى التجميعى المرجح لأدجورث - مارشال يجتاز اختبار الإنعكاس فى الزمن.

٥- الرقم القياسى الأمثل للأسعار لفيشر = $\sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_{١}\ \text{كر}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\ \text{كر}_{٠}} \times \frac{\text{مجـ ع}_{١}\ \text{كر}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\ \text{كر}_{١}}}$

بديله الزمنى = $\sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_{٠}\ \text{كر}_{١}}{\text{مجـ ع}_{١}\ \text{كر}_{١}} \times \frac{\text{مجـ ع}_{٠}\ \text{كر}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{١}\ \text{كر}_{٠}}}$

إذن:

الرقم القياسى الأمثل للأسعار لفيشر × بديله الزمنى

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_{١}\ \text{كر}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\ \text{كر}_{٠}} \times \frac{\text{مجـ ع}_{١}\ \text{كر}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\ \text{كر}_{١}}} \times \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_{٠}\ \text{كر}_{١}}{\text{مجـ ع}_{١}\ \text{كر}_{١}} \times \frac{\text{مجـ ع}_{٠}\ \text{كر}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{١}\ \text{كر}_{٠}}} = ١$$

أى أن الرقم القياسى الأمثل لفيشر ينجح فى إجتياز اختبار الإنعكاس الزمنى.

وخلاصة القول أن الأرقام القياسيه الأتيه تجتاز بنجاح إختبار الإنعكاس فى الزمن:

الرقم القياسى التجميعى البسيط.

الرقم القياسى البسيط للمناسيب باستخدام الوسط الهندسى.

الرقم القياسى التجميعى المرجح لأدجورث - مارشال.

الرقم القياسى الأمثل لفيشر.

فى حين أن باقى الصيغ من الأرقام القياسيه لا تجتاز إختبار الإنعكاس فى الزمن.

إختبار الإنعكاس فى المعامل:-

يعرف البديل المعاملى للرقم القياسى بأنه نفس الرقم القياسى الأصلى بعد استبدال كل من الأسعار (ع) بالكميات (ك) والكميات (ك) بالأسعار (ع) مع تثبيت الأرقام الملحقه والخاصه بالزمن كما هى وذلك فى البسط والمقام، أى أنه للحصول على البديل المعاملى للرقم القياسى نستبدل.

ع. بـ ك. ، ع١ بـ ك١ ، ك. بـ ع. وهكذا ....

فإذا ضربنا الرقم القياسى الأصلى فى بديله المعاملى وكان الناتج هو منسوب القيمه (أى $\frac{\text{مجـ ق}_{1}}{\text{مجـ ق}_{0}} = \frac{\text{مجـ ع}_{1}\,\text{ك}_{1}}{\text{مجـ ع}_{0}\,\text{ك}_{0}}$) فيقال حينئذ أن الرقم القياسى. يجتاز إختبار الإنعكاس فى المعامل.

أى أن الرقم القياسى يجتاز إختبار الإنعكاس فى المعامل اذا تحقق الشرط التالى:

$$\text{الرقم القياسى الأصلى} \times \text{بديله المعاملى} = \text{منسوب القيمه} = \frac{\text{مجـ } ع_{1}\, ك_{1}}{\text{مجـ } ع_{0}\, ك_{0}}$$

وبالطريقة نفسها سوف نختار بعض صيغ الأرقام القياسيه لمعرفة أيها يجتاز هذا الإختبار وأيها يخفق فى اجتيازه.

١- الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار $= \frac{\text{مجـ } ع_{1}}{\text{مجـ } ع_{0}}$

بديله المعاملى $= \frac{\text{مجـ } ك_{1}}{\text{مجـ } ك_{0}}$

الرقم القياسى التجميعى البسيط × بديله المعاملى

$$= \frac{\text{مجـ } ع_{1}}{\text{مجـ } ع_{0}} \times \frac{\text{مجـ } ك_{1}}{\text{مجـ } ك_{0}} \neq \frac{\text{مجـ } ع_{1}\, ك_{1}}{\text{مجـ } ع_{0}\, ك_{0}}$$

وهذا يعنى أن الرقم القياسى التجميعى البسيط لا يجتاز اختبار الإنعكاس فى المعامل.

١- الرقم القياسى التجميعىالمرجح للأسعار للاسبير $= \frac{\text{مجـ } ع_{1}\, ك_{0}}{\text{مجـ } ع_{0}\, ك_{0}}$

بديله المعاملى $= \frac{\text{مجـ } ك_{1}\, ع_{0}}{\text{مجـ } ك_{0}\, ع_{0}}$

٢- الرقم القياسى التجميعى المرجح للاسعار للاسبير × بديله المعاملى

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ك}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ك}_{٠}} \times \frac{\text{مجـ ك}_{١}\text{ع}_{٠}}{\text{مجـ ك}_{٠}\text{ع}_{٠}} \neq \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ك}_{٠}}$$

وعلى هذا فإن الرقم القياسى المرجح للاسبير لا يحقق أيضا شروط الانعكاس المعاملى.

٣- الرقم القياسى المرجح للأسعار لباش = $\frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ك}_{١}}$

بديله المعاملى = $\frac{\text{مجـ ك}_{١}\text{ع}_{١}}{\text{مجـ ك}_{٠}\text{ع}_{١}}$

إذن:

الرقم القياسى للأسعار لباش × بديله المعاملى.

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ك}_{١}} \times \frac{\text{مجـ ك}_{١}\text{ع}_{١}}{\text{مجـ ك}_{٠}\text{ع}_{١}} \neq \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ك}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ك}_{٠}}$$

ويعنى هذا الرقم القياسى المرجح لباش لا يحقق شرط الإنعكاس المعاملى.

٤- الرقم القياسى المرجح للكميات لأدجورث-مارشال= $\frac{\text{مجـ ك}_{١}(\text{ع}_{٠}+\text{ع}_{١})}{\text{مجـ ك}_{٠}(\text{ع}_{٠}+\text{ع}_{١})}$

∴ بديله المعاملى= $\frac{\text{مجـ ع}_{١}(\text{ك}_{٠}+\text{ك}_{١})}{\text{مجـ ع}_{٠}(\text{ك}_{٠}+\text{ك}_{١})}$

ومن ثم فإن:

الرقم القياس للكميات لأدجورث – مارشال × بديله المعاملى

$$= \frac{\text{مجـ كر}_1 \text{ (ع}_0 + \text{ع}_1\text{)}}{\text{مجـ كر}_0 \text{ (ع}_0 + \text{ع}_1\text{)}} \times \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ (كر}_0 + \text{كر}_1\text{)}}{\text{مجـ ع}_0 \text{ (كر}_0 + \text{كر}_1\text{)}} \neq \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ كر}_1}{\text{مجـ ع}_0 \text{ كر}_0}$$

وهذا يعنى أيضا أن الرقم القياسى المرجح لأدجورث - مارشال لا يجتاز اختبار الإنعكاس فى المعامل.

٥- الرقم القياسى الأمثل للأسعار لفيشر $= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ كر}_0}{\text{مجـ ع}_0 \text{ كر}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ كر}_1}{\text{مجـ ع}_0 \text{ كر}_1}}$

بديله المعاملى $= \sqrt{\frac{\text{مجـ كر}_1 \text{ ع}_0}{\text{مجـ كر}_0 \text{ ع}_0} \times \frac{\text{مجـ كر}_1 \text{ ع}_1}{\text{مجـ كر}_0 \text{ ع}_1}}$

ويكون الإختبار على النحو التالى

الرقم القياسى الأمثل للأسعار لفيشر × بديله المعاملى.

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ كر}_0}{\text{مجـ ع}_0 \text{ كر}_0} \times \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ كر}_1}{\text{مجـ ع}_0 \text{ كر}_1}} \times \sqrt{\frac{\text{مجـ كر}_1 \text{ ع}_0}{\text{مجـ كر}_0 \text{ ع}_0} \times \frac{\text{مجـ كر}_1 \text{ ع}_1}{\text{مجـ كر}_0 \text{ ع}_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{[\text{مجـ ع}_1 \text{ كر}_1]^2}{[\text{مجـ ع}_0 \text{ كر}_0]^2}} = \frac{\text{مجـ ع}_1 \text{ كر}_1}{\text{مجـ ع}_0 \text{ كر}_0} = \text{منسوب القيمه.}$$

وهذا يعنى أن الرقم القياسى الأمثل لفيشر يجتاز بنجاح إختبار الإنعكاس فى المعامل، وقد سبق أن أوضحنا أن هذا الرقم يجتاز أيضا إختبار الإنعكاس فى الزمن. ولعل لفظ "الأمثل" لهذا الرقم القياسى مستمد فى الواقع

من إجتياز الرقم للإختيارين معا.

وخلاصة القول أن كل الصيغ المختلفة للأرقام القياسية لا تجتاز إختبار الإنعكاس فى المعامل إلا رقمين فقط وهما منسوب السعر ($\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_0}$) [أو منسوب الكمية ($\frac{\text{ك}_1}{\text{ك}_0}$) والرقم القياسى الأمثل لفيشر، فهما الرقمان الوحيدان اللذان يجتازا هذا الإختبار.

ويمكن للقارئ أن يجرى بنفسه هذين الإختبارين على ما تبقى من صيغ الأرقام القياسيه ويحكم بنفسه على فشلها أو نجاحها فى إجتياز أحد الإختبارين أو كلاهما.

وتجدر الإشارة الى أن الأرقام القياسيه التى لا تجتاز هذين الإختبارين لا يعنى أنها أرقام رديئة أو ليس لها قيمه، فمدلول الجوده وفقا لهذين الإختبارين ليس إلا مدلون رياضى بحت وهو مدلول مختلف عليه والتسليم به يعنى استبعاد معظم الصيغ المستخدمه فى تكوين الأرقام القياسيه، فمعظم هذه الأرقام، إن لم تجتاز أى من هذين الإختبارين، يعد مقبولاً فكريا ومنطقياً – خصوصا رقمى لا سبير وباش. وعلى ذلك فإنه من الواجب أن يكون المؤشر الصحيح لإستخدام أى صوره من الصور المختلفه للأرقام القياسيه هو مدلولها الإقتصادى وليس الرياضى.

مثال (٨)

الآتى بيان بالأسعار والكميات المستهلكه لثلاث سلع أ ، ب ، جـ فى سنتى ١٩٩٠ ، ١٩٩٦:

السلع	١٩٩٠		١٩٩٦	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
أ	٦	٨٠	٨	١٢٠
ب	٣	١٠٠	٤	٢٠٠
جـ	٥	١٥٠	٦	١٠٠

المطلوب:

١- إيجاد الأرقام القياسيه التاليه:

الرقم القياسى التجميعى البسيط للكميات، الرقم القياسى التجميعى المرجح للأسعار لكل من لاسبير ، أدجورث - مارشال، فيشر .

٢- اختبار خاصيتى الإنعكاس فى الزمن والإنعكاس فى المعامل لكل من الأرقام السابقه.

الحل

يلزم الحل تكوين الجدول التالي:

	السلعة	أ	ب	ج	المجموع
١٩٩٠	السعر ع.	٦	٣	٥	١٤
	السعر ك.	٨٠	١٠٠	١٥٠	٣٣٠
١٩٩٦	السعر ع١	٨	٤	٦	١٨
	السعر ك١	١٢٠	٢٠٠	١٠٠	٤٢٠
	ع١ ك.	٦٤٠	٤٠٠	٩٠٠	١٩٤٠
	ع. ك.	٤٨٠	٣٠٠	٧٥٠	١٥٣٠
	ع. ك١	٧٢٠	٦٠٠	٥٠٠	١٨٢٠
	ع١ ك١	٩٦٠	٨٠٠	٦٠٠	٢٣٦٠
	(ع. + ع١)	١٤	٧	١١	
	ك١ (ع. + ع١)	١٦٨٠	١٤٠٠	١١٠٠	٤١٨٠
	ك. (ع. + ع١)	١١٢٠	٧٠٠	١٦٥٠	٣٤٧٠
	(ك. + ك١)	٢٠٠	٣٠٠	٢٥٠	
	ع١ (ك. + ك١)	١٦٠٠	١٢٠٠	١٥٠٠	٤٣٠٠
	ع. (ك. + ك١)	١٢٠٠	٩٠٠	١٢٥٠	٣٣٥٠

١- الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات = مجـ ك١ / مجـ ك. = ٤٢٠ / ٣٣٠

بديله الزمني = مجـ ك. / مجـ ك١ = ٣٣٠ / ٤٢٠

$$\text{بديله المعاملى} = \frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع}_0} = \frac{18}{14}$$

$$\text{منسوب القيمة (الرقم القياسى للقيمة)} = \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_0} = \frac{2360}{1530}$$

$$= 1{,}5425$$

الانعكاس فى الزمن:

$$\text{الرقم القياسى} \times \text{بديله الزمنى} = \frac{420}{330} \times \frac{330}{420} = 1$$

ومن ثم فإن:

الرقم القياسى التجميعى البسيط للكميات يجتاز إختبار الإنعكاس فى الزمن.

الإنعكاس فى المعامل:

$$\text{الرقم القياسى} \times \text{بديله المعاملى} = \frac{420}{330} \times \frac{18}{14} = 1{,}6364$$

$$\neq 1{,}5425$$

وهذا يعنى أن الرقم القياسى التجميعى البسيط للكميات لا يحقق شرط الإنعكاس فى المعامل.

٢- الرقم القياسى المرجح للأسعار للاسبير

$$= \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_0}{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_0} = \frac{1940}{1530}$$

$$\text{بديله الزمنى} = \frac{\text{مجـ ع}_0\text{ك}_1}{\text{مجـ ع}_1\text{ك}_1} = \frac{1820}{2360}$$

$$\text{بديله المعاملى} = \frac{\text{مجـ ك}_1\text{ع}_0}{\text{مجـ ك}_0\text{ع}_0} = \frac{1820}{1530}$$

الإنعاكس فى الزمن:

$$\text{الرقم القياسى} \times \text{بديله الزمنى} = \frac{١٩٤٠}{١٥٣٠} \times \frac{١٨٢٠}{٢٣٦٠} \neq ١$$

ويعنى ذلك أن الرقم القياسى للأسعار للاسبير لا يجتاز إختبار الإنعكاس فى الزمن .

الإنعكاس فى المعامل:

$$\text{الرقم القياسى} \times \text{بديله المعاملى} = \frac{١٩٤٠}{١٥٣٠} \times \frac{١٨٢٠}{١٥٣٠} = ١,٥٠٨٣$$

$$\neq ١,٥٤٢٥$$

وهذا يعنى أن الرقم القياسى للأسعار للاسبير لا يحقق شرط الإنعكاس فى المعامل.

٣- الرقم القياسى المرجح للأسعار لأدجورث-مارشال= $\frac{\text{مجـ ع}_١ (\text{ك}_٠ + \text{ك}_١)}{\text{مجـ ع}_٠ (\text{ك}_٠ + \text{ك}_١)}$

$$= \frac{٤٣٠٠}{٣٣٥٠}$$

$$\text{بديله الزمنى} = \frac{\text{مجـ ع}_٠ (\text{ك}_١ + \text{ك}_٠)}{\text{مجـ ع}_١ (\text{ك}_١ + \text{ك}_٠)} = \frac{٣٣٥٠}{٤٣٠٠}$$

$$\text{بديله المعاملى} = \frac{\text{مجـ ك}_١ (\text{ع}_٠ + \text{ع}_١)}{\text{مجـ ك}_٠ (\text{ع}_٠ + \text{ع}_١)} = \frac{٤١٨٠}{٣٤٧٠}$$

إختبار الإنعكاس فى الزمن:

$$\text{الرقم القياسى} \times \text{بديله الزمنى} = \frac{٤٣٠٠}{٣٣٥٠} \times \frac{٣٣٥٠}{٤٣٠٠} = ١$$

ويتضح من ذلك أن الرقم القياسي للأسعار لأدجورث - مارشال يحقق شرط الإنعكاس الزمني.

إختبار الإنعكاس في المعامل:

$$\text{الرقم القياسي} \times \text{بديله المعاملي} = \frac{٤٣٠٠}{٣٣٥٠} \times \frac{٤١٨٠}{٣٤٧٠} = ١,٠٥٤٦٢$$

$$\neq ١,٠٥٤٢٥$$

إذن:

الرقم القياسي المرجح للأسعار لأدجورث - مارشال لا يجتاز إختبار الإنعكاس في المعامل.

٤- الرقم القياسي الأمثل للأسعار $= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_.}{\text{مجـ ع}_.\text{ ك}_.} \times \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_.\text{ ك}_1}}$

$$= \sqrt{\frac{١٩٤٠}{١٥٣٠} \times \frac{٢٣٦٠}{١٨٢٠}}$$

بديله الزمني $= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_.\text{ ك}_1}{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_1} \times \frac{\text{مجـ ع}_.\text{ ك}_.}{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_.}} = \sqrt{\frac{١٨٢٠}{٢٣٦٠} \times \frac{١٥٣٠}{١٩٤٠}}$

بديله المعاملي $= \sqrt{\frac{\text{مجـ ك}_1\text{ ع}_.}{\text{مجـ ك}_.\text{ ع}_.} \times \frac{\text{مجـ ك}_1\text{ ع}_1}{\text{مجـ ك}_.\text{ ع}_1}} = \sqrt{\frac{١٨٢٠}{١٥٣٠} \times \frac{٢٣٦٠}{١٩٤٠}}$

إختبار الإنعكاس في الزمن:

، الرقم القياسي × بديله الزمني $= \sqrt{\frac{١٩٤٠}{١٥٣٠} \times \frac{٢٣٦٠}{١٨٢٠}} \times \sqrt{\frac{١٨٢٠}{٢٣٦٠} \times \frac{١٥٣٠}{١٩٤٠}}$

ويعني ذلك أن الرقم القياسي للأسعار لفيشر يجتاز إختبار الإنعكاس في الزمن

إختبار الإنعكاس فى المعامل:

الرقم القياسى × بديله المعاملى = $\sqrt{\frac{١٩٤٠}{١٥٣٠} \times \frac{٢٣٦٠}{١٨٢٠} \times \frac{١٨٢٠}{١٥٣٠} \times \frac{٢٣٦٠}{١٩٤٠}}$

= $\frac{٢٣٦٠}{١٥٣٠}$ = ١,٥٤٢٥ (أى منسوب القيمه)

وهذا يعنى أن الرقم القياسى للأسعار لفيشر يجتاز أيضا إختبار الإنعكاس فى المعامل.

تعديل صيغ الأرقام القياسية:-

رأينا من العرض السابق أن الرقم القياسي الوحيد الذى يجتاز إختبار الإنعكاس فى الزمن والإنعكاس فى المعامل هو الرقم القياسي الأمثل لفيشر، وحيث أن مفهوم الجودة للرقم القياسي يتوقف على مدى إجتيازه لأحد هذين الإختبارين أو كلاهما، لذلك كان من الأهمية بمكان أن توجد طريقة يتم بها تعديل أى صيغة من صيغ الأرقام القياسية حتى تتمكن من إجتياز الأختبارين.

ولكي يمكن لأى صيغة من صيغ الأرقام القياسية أن تجتاز إختبارى الإنعكاس الزمنى والإنعكاس المعاملى معاً فلابد من تحويل الصيغة إلى صيغة الرقم القياسي الأمثل لفيشر. ويتطلب ذلك - بداية - أن نفرق فى التعبير بين صيغة الرقم القياسي وبديلها ومقلوبها.

تعديل صيغة الرقم القياسي بحيث تجتاز إختبار الإنعكاس فى الزمن.

قبل أن نتعرض لطريقة تعديل صيغة الرقم القياسي بحيث تجتاز إختبار الإنعكاس فى الزمن يجب أن نوضح أولاً مفهوم "المقلوب الزمنى" للرقم القياسي، فالمقلوب الزمنى للرقم القياسي هو مقلوب البديل الزمنى للرقم القياسي، أى أن:

$$\text{المقلوب الزمنى للرقم القياسي} = \frac{١}{\text{البديل الزمنى للرقم القياسي}}$$

وتتم عملية تعديل صيغة الرقم القياسى لكى يجتـاز إختبـار الإنعكـاس فى الزمن بأن نأخذ الوسط الهندسى للرقم القياسى الأصلــى ومقلوبـه الزمنــى، أى أن:

$$\text{الرقم القياسى المعدل} = \sqrt{\text{الرقم القياسى الأصلى} \times \text{مقلوبه الزمنى}}$$

وهذه الصيغة المعدلة لـلرقم القياسـى تكـون هـى نفسـها صيغـة الرقـم القياسى الأمثل لفيشر والتى نعلم أنها تجتاز إختبار الإنعكاس الزمنى.

فإذا أخذنا على سبيل المثـال الرقـم القياسـى للأسـعار للأسـبير والـذى نعلم أنه لا يجتاز الإنعكاس فى الزمن، فيتم تعديلـه لكـى يجتـاز هـذا الإختبـار على النحو التالى:

$$\text{الرقم القياسى المرجح للأسعار للاسبير} = \frac{\text{مجـ } ع_{١}\ ك_{ر٠}}{\text{مجـ } ع_{٠}\ ك_{ر٠}}$$

$$\text{بديله الزمنى} = \frac{\text{مجـ } ع_{٠}\ ك_{ر١}}{\text{مجـ } ع_{١}\ ك_{ر١}}$$

$$\text{مقلوبه الزمنى} = \frac{١}{\text{بديله الزمنى}} = \frac{١}{\dfrac{\text{مجـ } ع_{٠}\ ك_{ر١}}{\text{مجـ } ع_{١}\ ك_{ر١}}} = \frac{\text{مجـ } ع_{١}\ ك_{ر١}}{\text{مجـ } ع_{٠}\ ك_{ر١}}$$

ومن ثم فإن:

$$\textbf{الرقم القياسى المعدل للأسعار للاسبير} = \sqrt{\textbf{الرقم القياسى الأصلى} \times \textbf{مقلوبه الزمنى}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ } ع_{١}\ ك_{ر٠}}{\text{مجـ } ع_{٠}\ ك_{ر٠}} \times \frac{\text{مجـ } ع_{١}\ ك_{ر١}}{\text{مجـ } ع_{٠}\ ك_{ر١}}}$$

وهى صيغة الرقم القياسى الأمثل للأسعار والتى نعلم أنها تجتاز إختبار الإنعكاس فى الزمن.

تعديل صيغة الرقم القياسى بحيث تجتاز الإنعكاس فى المعامل.

قبل أن نتناول طريقة تعديل صيغة الرقم القياسى بحيث يجتاز إختبار الإنعكاس فى المعامل، لابد أن نوضح أولا مفهوم "المقلوب المعاملى" للرقم القياسى.

فالمقلوب المعاملى للرقم القياسى هو خارج قسمة منسوب القيمة على البديل المعاملى للرقم القياسى، أى أن:

$$\text{المقلوب المعاملى للرقم القياسى} = \frac{\text{منسوب القيمة}}{\text{البديل المعاملى للرقم القياسى}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{مجـ } ع_1 \, ك_1}{\text{مجـ } ع_0 \, ك_0}}{\text{البديل المعاملى للرقم القياسى}}$$

ويتم تعديل الرقم القياسى الأصلى لكى يجتاز إختبار الإنعكاس فى المعامل بأن نحسب الوسط الهندسى للرقم القياسى الأصلى ومقلوبه المعاملى، حيث:

$$\text{الرقم القياسى المعدل} = \sqrt{\text{الرقم القياسى الأصلى} \times \text{مقلوبه المعاملى}}$$

وهذه الصيغة المعدلة للرقم القياسى ستكون فى الغالب الاعم من الصيغ هى نفسها صيغة الرقم القياسى الأمثل لفيشر والذى نعلم يقينا أنه يجتاز إختبار الإنعكاس فى المعامل.

ويمكن تبيان هذه الطريقة بالتطبيق على رقمى باش وإدجورث - مارشال- على سبيل المثال- حيث أنهما لا يجتازا إختبار الإنعكاس فى المعامل.

أولاً: الرقم القياسى للأسعار لباش = $\frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ كر}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ كر}_{١}}$

بديله المعاملى = $\frac{\text{مجـ كر}_{١}\text{ ع}_{١}}{\text{مجـ كر}_{٠}\text{ ع}_{١}}$

منسوب القيمة = $\frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ كر}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ كر}_{٠}}$

المقلوب المعاملى = منسوب القيمة ÷ البديل المعاملى

$$= \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ كر}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ كر}_{٠}} \div \frac{\text{مجـ كر}_{١}\text{ ع}_{١}}{\text{مجـ كر}_{٠}\text{ ع}_{١}} = \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ كر}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ كر}_{٠}}$$

وبالتالى فإن:

الرقم القياسى المعدل للأسعار لباش = $\sqrt{\text{الرقم القياسى الأصلى × مقلوبه المعاملى}}$

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ كر}_{١}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ كر}_{١}} \times \frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ كر}_{٠}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ كر}_{٠}}}$$

وهى نفسها صيغة الرقم القياسى الأمثل للأسعار لفيشر والتى نعلم أنها تجتاز إختبار الإنعكاس فى المعامل.

ثانياً: الرقم القياسى للأسعار لأدجورث-مارشال = $\frac{\text{مجـ ع}_{١}\text{ (كر}_{٠}\text{ + كر}_{١}\text{)}}{\text{مجـ ع}_{٠}\text{ (كر}_{٠}\text{ + كر}_{١}\text{)}}$

$$\text{بديله المعاملى} = \frac{\text{مجـ } ك_{ر١}\,(ع_{٠} + ع_{١})}{\text{مجـ } ك_{ر٠}\,(ع_{٠} + ع_{١})}$$

$$\text{المقلوب المعاملى} = \frac{\text{مجـ } ع_{١}ك_{ر١}}{\text{مجـ } ع_{٠}ك_{ر١}} \div \frac{\text{مجـ } ك_{ر١}\,(ع_{٠} + ع_{١})}{\text{مجـ } ك_{ر٠}\,(ع_{٠} + ع_{١})}$$

$$= \frac{\text{مجـ } ع_{١}ك_{ر١}}{\text{مجـ } ع_{٠}ك_{ر١}} \times \frac{\text{مجـ } ك_{ر٠}\,(ع_{٠} + ع_{١})}{\text{مجـ } ك_{ر١}\,(ع_{٠} + ع_{١})}$$

إذن:

الرقم القياسى المعدل للأسعار = $\sqrt{\text{الرقم القياسى الأصلى} \times \text{مقلوبه المعاملى}}$

لأدجورث–مارشال

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ } ع_{١}\,(ك_{ر٠} + ك_{ر١})}{\text{مجـ } ع_{٠}\,(ك_{ر٠} + ك_{ر١})} \times \frac{\text{مجـ } ع_{١}ك_{ر١}}{\text{مجـ } ع_{٠}ك_{ر١}} \times \frac{\text{مجـ } ك_{ر٠}\,(ع_{٠} + ع_{١})}{\text{مجـ } ك_{ر١}\,(ع_{٠} + ع_{١})}}$$

وبالرغم من أن هذه الصيغة المعدلة للرقم القياسى ليست هى صيغة الرقم القياسى الأمثل، إلا أنها تجتاز إختبار الإنعكاس فى المعامل، حيث يمكن إثبات أن:

الرقم القياسى المعدل للأسعار لأدجورث – مارشال × بديله المعاملى = منسوب القيمة

وذلك على النحو التالى:

البديل المعاملى للرقم القياسى المعدل.

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ } ك_{ر١}\,(ع_{٠} + ع_{١})}{\text{مجـ } ك_{ر٠}\,(ع_{٠} + ع_{١})} \times \frac{\text{مجـ } ك_{ر١}ع_{١}}{\text{مجـ } ك_{ر٠}ع_{١}} \times \frac{\text{مجـ } ع_{٠}\,(ك_{ر٠} + ك_{ر١})}{\text{مجـ } ع_{١}\,(ك_{ر٠} + ك_{ر١})}}$$

إذن:

الرقم القياسى المعدل للأسعار لأدجورث - مارشال × بديله المعاملى

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ } ع_{١} (ك_{٠} + ك_{١})}{\text{مجـ } ع_{٠} (ك_{٠} + ك_{١})} \times \frac{\text{مجـ } ع_{١} ك_{١}}{\text{مجـ } ع_{٠} ك_{١}} \times \frac{\text{مجـ } ك_{٠} (ع_{٠} + ع_{١})}{\text{مجـ } ك_{١} (ع_{٠} + ع_{١})}}$$

$$\times \sqrt{\frac{\text{مجـ } ك_{١} (ع_{٠} + ع_{١})}{\text{مجـ } ك_{٠} (ع_{٠} + ع_{١})} \times \frac{\text{مجـ } ك_{١} ع_{١}}{\text{مجـ } ك_{٠} ع_{١}} \times \frac{\text{مجـ } ع_{٠} (ك_{٠} + ك_{١})}{\text{مجـ } ع_{١} (ك_{٠} + ك_{١})}}$$

$$= \frac{\text{مجـ } ع_{١} ك_{١}}{\text{مجـ } ع_{٠} ك_{٠}} = \text{منسوب القيمة.}$$

وخلاصة القول، أنه يمكن تعديل أى رقم قياسى لا يجتاز إختبار الإنعكاس الزمنى أو الإنعكاس المعاملى بحيث تصبح الصيغة المعدلة للرقم القياسى محققة لشرط الإنعكاس فى الزمن أو الإنعكاس فى المعامل.

مثال (٩)

إستخدم بيانات المثال (٨) فى حساب الرقم القياسى التجميعى المرجح المعدل للأسعار لكل من لاسبير وباش وأدجورث - مارشال بحيث يجتاز إختبارى الإنعكاس فى الزمن والإنعكاس فى العامل.

الحل

أولاً: الرقم القياسى المرجح للأسعار للاسبير $= \frac{\text{مجـ } ع_{١} ك_{٠}}{\text{مجـ } ع_{٠} ك_{٠}} \times ١٠٠$

$$= \frac{١٩٤٠}{١٥٣٠} \times ١٠٠ = ١٢٦,٨\%$$

لإيجاد صيغته المعدلة التى تجتاز إختبار الإنعكاس فى الزمن، فإن:

$$\text{بديله الزمنى} = \frac{\text{مجـ ع. ك}_1}{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_1} = \frac{١٨٢٠}{٢٣٦٠}$$

$$\text{مقلوبه الزمنى} = \frac{١}{\text{البديل الزمنى}} = \frac{٢٣٦٠}{١٨٢٠}$$

الرقم القياسى المرجح للأسعار للاسبير والذى يجتاز إختبار الإنعكاس فى الزمن $= \sqrt{\text{الرقم القياسى المرجح للأسعار للاسبير} \times \text{مقلوبه الزمنى}} \times ١٠٠$

$$= \sqrt{\frac{١٩٤٠}{١٥٣٠} \times \frac{٢٣٦٠}{١٨٢٠}} \times ١٠٠ = ١٢٨,٢٣\%.$$

لإيجاد الصيغة المعدلة للرقم القياسى للاسبير التى تجتاز إختبار الإنعكاس فى المعامل فإن:

$$\text{البديل المعاملى} = \frac{\text{مجـ ك}_1\text{ ع}_0}{\text{مجـ ك. ع.}} = \frac{١٨٢٠}{١٥٣٠}$$

$$\text{منسوب القيمة} = \frac{\text{مجـ ع}_1\text{ ك}_1}{\text{مجـ ع. ك.}} = \frac{٢٣٦٠}{١٥٣٠}$$

$$= \frac{٢٣٦٠}{١٥٣٠} \times \frac{١٥٣٠}{١٨٢٠} = \frac{٢٣٦٠}{١٨٢٠}$$

الرقم القياسى المرجح المعدل للأسعار للاسبير والذى يجتاز إختبار الإنعكاس فى المعامل.

$= \sqrt{\text{الرقم القياسى المرجح للأسعار للاسبير} \times \text{مقلوبه المعاملى}} \times ١٠٠$

$$= \sqrt{\frac{١٩٤٠}{١٥٣٠} \times \frac{٢٣٦٠}{١٨٢٠}} \times ١٠٠ = ١٢٨,٢٣\%.$$

ثانياً: الرقم القياسى المرجح للأسعار لباش= $\frac{\text{مجـ ع}_١ \text{ك}_١}{\text{مجـ ع. ك}_١} = \frac{٢٣٦٠}{١٨٢٠} \times ١٠٠$

$= ١٢٩,٦٧\%.$

لإيجاد صيغته المعدلة التى تجتاز إختبار الانعكاس فى الزمن نجد أن:

$$\text{بديله الزمنى} = \frac{\text{مجـ ع. ك.}}{\text{مجـ ع}_١ \text{ك.}} = \frac{١٥٣٠}{١٩٤٠}$$

$$\text{مقلوبه الزمنى} = \frac{١}{\text{البديل الزمنى}} = \frac{١٩٤٠}{١٥٣٠}$$

الرقم القياسى المرجح المعدل للأسعار لباش الذى يجتاز إختبار الإنعكاس الزمنى $= \sqrt{\text{الرقم القياسى الأصلى} \times \text{مقلوبه الزمنى}} \times ١٠٠$

$$= \sqrt{\frac{٢٣٦٠}{١٨٢٠} \times \frac{١٩٤٠}{١٥٣٠}} \times ١٠٠ = ١٢٨,٢٣\%.$$

لإيجاد الصيغة المعدلة للرقم القياسى لباش التى تحقق شرط الإنعكاس المعاملى فإن:

$$\text{البديل المعاملى} = \frac{\text{مجـ ك}_١ \text{ع}_١}{\text{مجـ ك. ع}_١} = \frac{٢٣٦٠}{١٩٤٠}$$

$$\text{مقلوب الرقم المعاملى} = \frac{\text{منسوب القيمة}}{\text{البديل المعاملى}} = \frac{٢٣٦٠}{١٥٣٠} \times \frac{١٩٤٠}{٢٣٦٠} = \frac{١٩٤٠}{١٥٣٠}$$

وبالتالى فإن:

الرقم القياسي المرجح المعدل للأسعار لباش والذى يحقق شرط الإنعكاس المعاملى = $\sqrt{\text{الرقم القياسي الأصلى لباش} \times \text{مقلوبه المعاملى}}$ × ١٠٠

$$= \sqrt{\frac{٢٣٦٠}{١٨٢٠} \times \frac{١٩٤٠}{١٥٣٠}} \times ١٠٠ = ١٢٨,٢٣\%.$$

ثالثاً:

الرقم القياسي المرجح للأسعار لأدجورث - مارشال

$$= \frac{\text{مجـ ع}_١ (\text{ك}_٠ + \text{ك}_١)}{\text{مجـ ع}_٠ (\text{ك}_٠ + \text{ك}_١)} \times ١٠٠ = \frac{٤٣٠٠}{٣٣٥٠} \times ١٠٠ = ١٢٨,٣٦\%.$$

نعلم أن هذا الرقم بصيغته الأصلية السابقة يجتاز إختبار الإنعكاس فى الزمن، لذلك سنحسب فقط صيغته المعدله التى تجتاز إختبار الإنعكاس فى المعامل حيث نجد أن:

$$\text{البديل المعاملى} = \frac{\text{مجـ ك}_١ (\text{ع}_٠ + \text{ع}_١)}{\text{مجـ ك}_٠ (\text{ع}_٠ + \text{ع}_١)} = \frac{٤١٨٠}{٣٤٧٠}$$

$$\text{المقلوب المعاملى للرقم القياسي الأصلى} = \frac{\text{منسوب القيمة}}{\text{البديل المعاملى}}$$

$$= \frac{٢٣٦٠}{١٥٣٠} \times \frac{٣٤٧٠}{٤١٨٠} = \frac{٨١٨٩٢٠٠}{٦٣٩٥٤٠٠}$$

ومن ثم فإن:

الرقم القياسى المرجح المعدل للأسعار لأدجورث-مارشال والذى يجتاز إختبار الإنعكاس فى المعامل= $\sqrt{\text{الرقم القياسى الأصلى} \times \text{مقلوبه المعاملى}} \times ١٠٠$

$$= \sqrt{\frac{٣٤٠٠}{٣٣٥٠} \times \frac{٨١٨٩٢}{٦٣٩٥٤}} \times ١٠٠ = ١٢٨,٢\%.$$

الأساس الثابت والأساس المتحرك

رأينا فيما سبق أن الرقم القياسى سواء البسيط أو المرجح بأوزان ترجيح إنما يعتمد على تحديد فترة معينة تسمى فترة الأساس وتتخذ كأساس ثابت، ويعنى ذلك أن تنسب الأسعار (أو الكميات أو القيم) فى كل فترة من الفترات المتتالية (فترات المقارنة) إلى أسعار (أو كميات أو قيم) فترة الأساس على الترتيب.

ويجب مراعاة أنه ليس من الضرورى أن تكون فترة الأساس هى الفترة الأولى، فمن الممكن إختيار أى فترة اخرى كفترة أساس غير الفترة الأولى خصوصاً إذا كانت قيمة الظاهرة فى الفترة الاولى شاذة كأن تكون أقل ما يمكن أو أكبر ما يمكن. فما يجب أخذه فى الاعتبار عند إختيار فترة الأساس- كما سبق أن أوضحنا- هو أن تتميز بالإستقرار النسبى وأن تكون بعيده عن الظروف غير العادية التى تتعرض لها الظاهرة، على ألا تكون فى نفس الوقت بعيدة عن سنوات المقارنة.

ويلاحظ أنه كلما كانت الأسعار (أو الكميات أو القيم) مأخوذة على فترات زمنية متقاربة وكانت فترة الأساس قريبة من فترة المقارنة فإن قيم الأرقام القياسية تقترب من بعضها. أما فى الحالات التى يحدث فيها تفاوت كبير فى الأسعار (أو الكميات أو القيم) لفترة زمنية طويله فنجد أن إستخدام الأرقام القياسية بأساس ثابت قد يؤدى إلى أن تختلف قيم الأرقام القياسية فيما بينها اختلافا كبيرا. ولعلاج هذه المشكلة يفضل إستخدام أساس متحرك وذلك لأى صورة من صور الأرقام القياسية السابقة فنحصل على ما يسمى بالأرقام القياسية الدورية أو أرقام السلسلة، والأساس المتحرك يعنى أننا ننسب الأسعار (أو الكميات أو القيم) فى كل فترة إلى أسعار (أو كميات أو قيم) الفترة السابقة لها مباشرة على الترتيب.

ومن مميزات الرقم القياسى ذو الأساس المتحرك أنه يعطى مقارنة دقيقة للتغيرات النسبية التى تحدث فى الظواهر المختلفة من سنة إلى أخرى، كما أنه يمكن- بإتباعه- من التغيير فى مكونات الرقم القياسى وذلك بإدخال السلع التى أستحدثت أو زادت أهميتها وإخراج السلع التى بطل أستعمالها أو قلت أهميتها، كما يفيد إستخدام هذا الرقم فى الحالات التى تكون فيها السلعة تحمل نفس الأسم فى فترتى الأساس والمقارنة ولكن طبيعتها أختلفت فى فترة منهما عنها فى الفترة الأخرى، فتقصير المدة بين فترتى الأساس والمقارنة من شأنه أن يجعل السلع الداخلة فى تكوين الرقم القياسى متشابهة إلى حد كبير سواء من حيث أنواع السلع أو من حيث أسعارها او الكميات المستهلكة منها، ومعنى ذلك أن الأرقام القياسية ذات الأساس المتحرك سوف تمكن من أن نأخذ فى الإعتبار التغيرات الأساسية التى يمكن أن تحدث فى الإنتاج

والتوزيع والإستهلاك للسلع المختلفة الداخلة فى تكوين الرقم القياسى بعكس الحال فى حالة إستخدام الأرقام القياسية ذات الأساس الثابت.

فإذا كان لدينا أسعار وكميات إحدى السلع فى السنوات ١٩٩٥، ١٩٩٦، ١٩٩٧، ١٩٩٨، ورمزنا للأسعار بالرموز $ع_٠$، $ع_١$، $ع_٢$، $ع_٣$، وللكميات بالرموز $ك_٠$، $ك_١$، $ك_٢$، $ك_٣$ على الترتيب.

فإذا أستخدمنا مثلاً الرقم القياسى البسيط لمناسيب الأسعار فإن:

أ- فى حالة الأساس الثابت:

بأخذ سنة ١٩٩٥ كسنة أساس، يمكن أن نقارن الأسعار فى السنوات الأخرى بالنسبة لسنة الأساس، فعند مقارنة أسعار سنة ١٩٩٦ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٩٥ فإن منسوب السعر هو $\frac{ع_١}{ع_٠}$ وعند مقارنة أسعار سنة ١٩٩٧ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٩٥ فإن منسوب السعر هو $\frac{ع_٢}{ع_٠}$ وهكذا.

ب- فى حالة الأساس المتحرك:

فى هذه الحالة تعتبر السنة السابقة مباشرة لسنة المقارنة هى سنة الأساس، أى أنه ليس هناك سنة أساس ثابتة، حيث نقارن أسعار سنة ١٩٩٦ بأسعار سنة ١٩٩٥ ويكون منسوب السعر هو $\frac{ع_١}{ع_٠}$ ثم نقارن أسعار سنة ١٩٩٧ بأسعار سنة ١٩٩٦ ويكون منسوب السعر هو $\frac{ع_٢}{ع_١}$ وهكذا.

بالمثل إذا أستخدمنا الرقم القياسى المرجح للاسعار (رقم لاسبير مثلا) فإن:

أ- فى حالة الأساس الثابت:

بإعتبار أن سنة ١٩٩٥ هى سنة الأساس، فعند مقارنة أسعار سنة ١٩٩٦ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٩٥، فإن الرقم القياسى للاسبير يأخذ الصورة:

$$\frac{مجـ\ ع_{١}\ ك_{٠}}{مجـ\ ع_{٠}\ ك_{٠}}$$

وعند مقارنة أسعار سنة ١٩٩٧ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٩٥ فإن الرقم القياسى للاسبير يأخذ الصورة التالية:

$$\frac{مجـ\ ع_{٢}\ ك_{٠}}{مجـ\ ع_{٠}\ ك_{٠}} \times ١٠٠$$

ب- فى حالة الأساس المتحرك:

فلحساب الرقم القياسى المرجح للأسعار فى سنة ١٩٩٧ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٩٥ كأساس يتم ذلك كالآتى:

نحسب الرقم القياسى للأسعار فى سنة ١٩٩٦ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٩٥ وهو:

$$\frac{مجـ\ ع_{١}\ ك_{٠}}{مجـ\ ع_{٠}\ ك_{٠}} \times ١٠٠$$

ثم نحسب الرقم القياسى للأسعار فى ١٩٩٧ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٩٦ كأساس ويأخذ الصورة:

$$\frac{مجـ\ ع_{٢}\ ك_{٠}}{مجـ\ ع_{١}\ ك_{١}} \times ١٠٠$$

ويكون الرقم القياسى المرجح للأسعار فى سنة ١٩٩٧ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٩٥ كأساس هو.

$$\frac{\text{مجـ } ع_1 ك_0}{\text{مجـ } ع_0 ك_0} \times \frac{\text{مجـ } ع_2 ك_1}{\text{مجـ } ع_1 ك_1} \times 100$$

وهذا الرقم سوف يختلف فى قيمته بالطبع عن الرقم القياسى للأسعار فى سنة ١٩٩٧ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٩٥ بطريقة الأساس الثابت وهو:

$$\frac{\text{مجـ } ع_2 ك_0}{\text{مجـ } ع_0 ك_0} \times 100$$

ويمكن تحويل الرقم القياسى بأساس متحرك إلى رقم قياسى بأساس ثابت، حيث نقوم بضرب الأرقام القياسية ذات الأساس المتحرك فى بعضها. فمثلاً، عند إيجاد رقم قياسى بسيط للأسعار فى سنة ١٩٩٨ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٩٥ كأساس يتم ذلك كما يلى:

$$\frac{ع_3}{ع_0} \times 100 = \frac{ع_3}{ع_2} \times \frac{ع_2}{ع_1} \times \frac{ع_1}{ع_0} \times 100$$

والعكس، فإنه يمكن إيجاد الرقم القياسى بأساس متحرك حيث نقوم بقسمة الأرقام القياسية بأساس ثابت حتى نحصل على الرقم القياسى ذو الأساس المتحرك المطلوب. فعلى سبيل المثال، فإن الرقم القياسى البسيط لأسعار سنة ١٩٩٨ بالنسبة لأسعار سنة ١٩٩٦ يحسب كالآتى:

$$\frac{ع_3}{ع_1} \times 100 = \left(\frac{ع_3}{ع_0} \div \frac{ع_1}{ع_0}\right) \times 100 = \frac{ع_3}{ع_0} \times \frac{ع_0}{ع_1} \times 100$$

مثال (١٠)

الجدول الآتى يبين الكميات المستوردة سنويا من القمح (بالألف طـن) من إحدى الدول في الفترة من ١٩٩٢ حتى ١٩٩٧.

السنة	١٩٩٢	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧
الكمية (بالألف طن)	٣٠	٣٢	٣٥	٤٠	٥٠	٦٠

والمطلوب إيجاد الرقم القياسى البسيط للكميات المستوردة بإستخدام مناسيب الكميات فى سنوات السلسلة وذلك:

أ-بإستخدام طريقة الأساس الثابت (سنة ١٩٩٢ كسنة أساس).

ب- بإستخدام طريقة الأساس المتحرك.

الحل

السنة	الكمية المتسوردة	الرقم القياسى بأساس ثابت (سنة ١٩٩٢ كأساس) $= \frac{ع}{ع_{.}} \times ١٠٠$	الرقم القياسى بأساس متحرك $= \frac{ع}{ع_{١-}} \times ١٠٠$
١٩٩٢	٣٠	(٣٠/٣٠) × ١٠٠ = ١٠٠٪	
١٩٩٣	٣٢	(٣٠/٣٢)× ١٠٠= ١٠٦,٦٧٪	(٣٠/٣٢) × ١٠٠= ١٠٦,٦٧٪
١٩٩٤	٣٥	(٣٠/٣٥)× ١٠٠= ١١٦,٦٧٪	(٣٢/٣٥)× ١٠٠= ١٠٩,٣٨٪
١٩٩٥	٤٠	(٣٠/٤٠)× ١٠٠= ١٣٣,٣٣٪	(٣٥/٤٠)× ١٠٠= ١١٤,٢٩٪
١٩٩٦	٥٠	(٣٠/٥٠)× ١٠٠= ١٦٦,٦٧٪	(٤٠/٥٠)× ١٠٠= ١٢٥٪
١٩٩٧	٦٠	(٣٠/٦٠)× ١٠٠= ٢٠٠٪	(٥٠/٦٠)× ١٠٠= ١٢٠٪

ولكي تتضح لنا أهمية أستخدام الأرقام القياسية ذات الأساس المتحرك وتفضيلها على الأرقام القياسية ذات الأساس الثابت دعنا نأخذ المثال التالي.

مثال (١١)

إذا كان الجدول الآتي يبين أسعار خمس سلع في الفترة من ١٩٩٤ حتى ١٩٩٧:

السلعة	سعر الوحدة من السلعة			
	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧
أ	–	٣	٥	٨
ب	٢	–	٤	٧
جـ	٣	٤	–	٦
د	٥	٧	١٠	–
هـ	٤	٦	٧	٩

والمطلوب: إيجاد الرقم القياسي التجميعي البسيط لأسعار هذه المجموعة من السلع في سنة ١٩٩٧ بالنسبة لسنة ١٩٩٤ كأساس.

الحل

إذا حسبنا الرقم القياسي المطلوب بين هذين العامين فقط بطريقة الأساس الثابت، فإننا سوف نهمل كلية كل من السلعة أ لأن سعرها غير معروف في سنة الأساس (١٩٩٤) والسلعة د لأن سعرها غير معروف في

سنة المقارنة (١٩٩٧)، أى أن الرقم القياسى بإستخدام الأساس الثابت فى هذه الحالة سوف يغفل قياس تغير السعر لهاتين السلعتين كليا ويحسب كالأتى:

$$\text{الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار} = \frac{\text{مجـ ع}_1}{\text{مجـ ع}_0} \times ١٠٠$$

فى عام ١٩٩٧ بالنسبة لـ ٩٤ (السلع الداخلة هى ب، جـ هـ).

$$= \frac{٧+٦+٩}{٢+٣+٤} \times ١٠٠ = ٢٤٤,٤٤\%$$

أما إذا حسبنا الرقم القياسى المطلوب وفقاً لطريقـة الأسـاس المتحـرك فإننا بذلك سـوف نعـالج إغفـال أى سلعة مـرة بـأن نأخذهـا فـى الأعتبـار فـى المرات التالية بمعنى أن السلعتين اللتين سوف يتم إغفال سعريهما فى كل مرة تختلفان عنهما فى المرات الأخرى، حيث نجد أن:

الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار فى عام ١٩٩٥ بالنسبة لـ

$$\text{١٩٩٤ (السلع الداخلة هى جـ، د، هـ)} = \frac{٤+٧+٦}{٣+٥+٤} \times ١٠٠ = ١٤١,٦٧\%.$$

الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار فى عام ١٩٩٦ بالنسبة لـ

$$\text{١٩٩٥ (السلع الداخلة هى أ، د، هـ)} = \frac{٥+١٠+٧}{٣+٧+٦} \times ١٠٠ = ١٣٧,٥\%.$$

الرقم القياسى التجميعى البسيط للأسعار فى عام ١٩٩٧ بالنسبة لـ

$$\text{١٩٩٦ (السلع الداخلة هى أ، ب، هـ)} = \frac{٨+٧+٩}{٥+٤+٧} \times ١٠٠ = ١٥٠\%.$$

ومن ثم فإن:

الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار في عام ١٩٩٧ بالنسبة لـ ١٩٩٤ = (١,٤١٦٧ × ١,٣٧٥ × ١,٥٠) × ١٠٠ = ٢٩٢,١٩٪.

مثال (١٣)

الجدول الآتي يبين أسعار أربع سلع خلال الفترة من ١٩٩٣ حتى ١٩٩٧ في إحدى المحافظات:

السلعة	سعر الوحدة من السلعة				
	١٩٩٣	١٩٩٤	١٩٩٥	١٩٩٦	١٩٩٧
أ	٨	١٠	١٢	١٦	١٨
ب	٥	٧	٦	٨	١٢
جـ	٢٠	٢٤	٣٠	٤٠	٥٠
د	١٢	١٥	٢١	١٨	٢٧

- **والمطلوب:**

١- إيجاد الرقم القياسي البسيط لمناسيب الأسعار في سنة ١٩٩٧ بالنسبة لسنة ١٩٩٣ بإستخدام الأساس المتحرك.

٢- من الرقم القياسي البسيط للأسعار ذي الأساس المتحرك المتحصل عليه في (١) أشتق:

أ- الرقم القياسي البسيط للأسعار لسنة ١٩٩٧ بالنسبة لسنة ١٩٩٤ كأساس.

ب- الرقم القياسى البسيط للأسعار لسنة ١٩٩٦ بالنسبة لسنة ١٩٩٣ كأساس.

الحل

سوف نرمز لأسعار السلع فى السنوات الخمس بالرموز التالية:

أسعار عام ١٩٩٣ = $ع_٠$. أسعار عام ١٩٩٤ = $ع_١$

أسعار عام ١٩٩٥ = $ع_٢$ أسعار عام ١٩٩٦ = $ع_٣$

أسعار عام ١٩٩٧ = $ع_٤$

الرقم القياسى البسيط لأسعار ١٩٩٤ بالنسبة لأسعار ١٩٩٣ = $م_١$

(بإستخدام الوسط الحسابى للمناسيب).

$$= \frac{\text{مجـ} \left(\frac{ع_١}{ع_٠}\right)}{ن} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١}{٤} \left(\frac{١٠}{٨} + \frac{٧}{٥} + \frac{٢٤}{٢٠} + \frac{١٥}{١٢}\right) \times ١٠٠ = ١٢٧,٥\%.$$

الرقم القياسى البسيط لأسعار ١٩٩٥ بالنسبة لأسعار ١٩٩٤.

$$= م_٢ = \frac{١}{٤} \left(\frac{١٢}{١٠} + \frac{٦}{٧} + \frac{٣٠}{٢٤} + \frac{٢١}{١٥}\right) \times ١٠٠ = ١١٧,٦٧٥\%.$$

الرقم القياسى البسيط لأسعار ١٩٩٦ بالنسبة لأسعار ١٩٩٥.

$$= م_٣ = \frac{١}{٤} \left(\frac{١٦}{١٢} + \frac{٨}{٦} + \frac{٤٠}{٣٠} + \frac{١٨}{٢١}\right) \times ١٠٠ = ١٢١,٢٥\%.$$

الرقم القياسى البسيط لأسعار ١٩٩٧ بالنسبة لأسعار ١٩٩٦.

$$\text{م}_{٤} = \frac{١}{٤}\left(\frac{١٨}{١٦} + \frac{١٢}{٨} + \frac{٥٠}{٤٠} + \frac{٢٧}{١٨}\right) \times ١٠٠ = ١٣٤,٣٧٥\%$$

١- الرقم القياسى البسيط لمناسيب الأسعار فى عام ١٩٩٧ بالنسبة لأسعار عام ١٩٩٣ بإستخدام طريقة الأساس المتحرك.

$$= \text{م}_{١} \times \text{م}_{٢} \times \text{م}_{٣} \times \text{م}_{٤}$$

$$= ١,٢٧٥ \times ١,١٧٦٧٥ \times ١,٢١٢٥ \times ١,٣٤٣٧٥ \times ١٠٠ = ٢٤٤,٤٥\%$$

فى حين أن الرقم القياسى البسيط لمناسيب الأسعار فى عام ١٩٩٧ بالنسبة لأسعار عام ١٩٩٣ بإستخدام طريقة الأساس الثابت

$$= \frac{١}{٤}\left(\frac{١٨}{٨} + \frac{١٢}{٥} + \frac{٥٠}{٢٠} + \frac{٢٧}{١٢}\right) \times ١٠٠ = ٢٣٥\%$$

وهو يختلف بالطبع عن نظيره المحسوب بأساس متحرك.

٢-أ- الرقم القياسى البسيط لمناسيب الأسعار فى عام ١٩٩٧ بالنسبة لأسعار عام ١٩٩٤ بإستخدام الأساس المتحرك

$$= \text{م}_{٢} \times \text{م}_{٣} \times \text{م}_{٤}$$

$$= ١,١٧٦٧٥ \times ١,٢١٢٥ \times ١,٣٤٣٧٥ \times ١٠٠ = ١٩١,٧٢٧\%$$

بينما الرقم القياسى البسيط لأسعار عام ١٩٩٧ بالنسبة لأسعار عام ١٩٩٤ بطريقة الأساس الثابت

$$= \frac{١}{٤}\left(\frac{١٨}{١٠} + \frac{١٢}{٧} + \frac{٥٠}{٢٤} + \frac{٢٧}{١٥}\right) \times ١٠٠ = ١٨٤,٩٢٥\%$$

وهذه النتيجة تختلف بداهة عن النتيجة السابقة المتحصل عليها بطريقة الأساس المتحرك.

ب- الرقم القياسى البسيط للمناسيب لأسعار عام ١٩٩٦ بالنسبة لأسعار عام ١٩٩٣ = $م_{١} \times م_{٢} \times م_{٣} \times ١٠٠$

=١,٢٧٥× ١,١٧٦٧٥× ١,٢١٢٥× ١٠٠ = ١٨١,١٩٪.

تعديل فترة الأساس:

قد يكون من المرغوب فيه أحيانا تعديل أو تغيير فترة الأساس للرقم القياسى إلى فترة أخرى وذلك فى حالة المقارنة بين رقمين قياسيين يختلفان فى فترتى الأساس، ففى هذه الحالة نجد أنه من الضرورى تغيير فترة الأساس لأحد هذين الرقمين إلى فترة الأساس للرقم الأخر حتى نستطيع قياس التغير فى الرقمين لأساس واحد. وأيضا إذا كان لدينا سلسلة من الأرقام القياسية عفا الدهر على فترة أساسها وأصبحت بعيدة زمنيا عن فترات المقارنة ولا تتمشى بالتالى مع حاضر الدراسة وذلك لإختلاف أنواع السلع وأنماط الإستهلاك ومستويات الدخول والانفاق وتغير القوة الشرائية للنقود وغير ذلك من العوامل، ففى هذه الحالة يكون من الضرورى تغيير فترة الأساس القديمة وأستبدالها بفترة أساس جديدة حديثة العهد بفترات المقارنة كى تتمشى مع حاضر الدراسة وتعبر بالتالى عن الواقع الفعلى للظواهر موضوع الدراسة، ويتم تركيب سلسلة جديدة من الأرقام القياسية بإستخدام فترة الأساس الجديدة.

وتغيير فترة الأساس لسلسلة من الأرقام القياسية تتم بقسمة كل رقم قياسي لكل فترة محسوبا بالأساس القديم على الرقم القياسى لنفس السلسلة المناظرة لفترة الأساس الجديدة فنحصل على سلسلة جديدة من الأرقام القياسية للفترات ذاتها بالأساس الجديد كما يتضح فى المثال التالى:

مثال (١٣)

بفرض أن الجدول التالى يبين الأرقام القياسية لإنتاجية العمالة فى الفترة من عام ١٩٨٥ حتى عام ١٩٩٥ بإعتبار أن سنة ١٩٨٥ هى سنة الأساس:

السنة	١٩٨٥	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	١٩٩٥
الرقم القياسى لإنتاجية العمالة	١٠٠	١١٥	١٢٣	١١٠	١٢٥	١٢٠	١٥٠	١٣٠	١١٠	٩٥	١١٥

والمطلوب: تغيير سنة الأساس فى السلسلة السابقة من سنة ١٩٨٥ إلى سنة ١٩٩٠.

الحل

لتغيير سنة الأساس للأرقام القياسية لكى تصبح سنة ١٩٩٠، فإننا نقسم كل رقم قياسى من السلسلة (١٩٨٥-١٩٩٥) على قيمة الرقم القياسى بنفس السلسلة فى عام ١٩٩٠ وهى ١٢٥ وضرب الناتج فى ١٠٠ حتى نجعل الرقم القياسى لسنة ١٩٩٠ يساوى ١٠٠٪، فنحصل بذلك على سلسلة جديدة من الأرقام القياسية لإنتاجية العمالة ولكن باستخدام سنة ١٩٩٠ كأساس.

السنة	١٩٨٥	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	١٩٩٥
الرقم القياسى لإنتاجية العمالة	٨٣,٣٣	٩٥,٨٣	١٠٢,٥	٩١,٦٧	١٠٤,١٧	١٠٠	١٢٥	١٠٨,٣٣	٩١,٦٧	٧٩,١٧	٩٥,٨٣

فالرقم القياسى الجديد للإنتاجية فى عام ١٩٨٥= $\frac{١٠٠}{١٢٠}$ × ١٠٠ = ٨٣,٣٣٪.

كذلك، فإن الرقم القياسى الجديد للإنتاجية فى عام ١٩٨٦= $\frac{١١٥}{١٢٠}$ ×١٠٠= ٩٥,٨٣٪

وهكذا بالنسبة لباقى سنوات السلسلة.

ويتضح لنا من هذا المثال أن قيمة الأرقام القياسية تختلف بإختلاف سنة الأساس وبالتالى يختلف المغزى الإقتصادى الذى يمكن إستنتاجه من هذه الأرقام، فبينما نجد أن إنتاجية العمالة فى سنة ١٩٨٨ قد زادت بمقدار ١٠٪ إذا إعتبرنا أن سنة ١٩٨٥ هى سنة الأساس، نجد أن إنتاجية العمالة فى ذات السنة (١٩٨٨) قد أنخفضت بمقدار ٨,٣٣٪ إذا أعتبرنا أن سنة ١٩٩٠ هى سنة الأساس.

إدماج سلسلتين من الأرقام القياسية فى سلسلة واحدة.

فى كثير من الأحيان قد يوجد للظاهرة الواحدة سلسلتين أو أكثر من الأرقام القياسية كل منها لها فترة أساس مختلفة، ففى هذه الحالة يمكن أن نستفيد من الطريقة السابق ذكرها لتعديل فترة الأساس فى ضم أو دمج السلسلتين من الأرقام القياسية ليكونا سلسلة واحدة مستمرة حتى يمكن أن نقيس التغيرات التى تطرأ على الظاهرة محل الدراسة بإستخدام فترة أساس

واحدة فذاك أفضل من معرفة مقدار التغير فى الظاهرة فى كل سلسلة على حده.

وتتم عملة دمج السلسلتين وذلك بالبحث عن الفترة المشتركة التى يتوافر فيها الأرقام القياسية للسلسلتين، وتؤخذ هذه الفترة كفترة أساس وينسب إلى الرقم القياسى للظاهرة فى تلك الفترة الارقام القياسية للظاهرة فى الفترات المختلفة فى السلسلتين فنحصل بذلك على سلسلة واحدة من الأرقام القياسية بأساس واحد.

مثال (١٤)

بفرض أن إحدى الشركات وجدت أن لديها سلسلتين من الأرقام القياسية لإنتاج الشركة: **السلسلة الأولى من سنة ١٩٨٨ حتى سنة ١٩٩٢ بإعتبار أن سنة ١٩٨٨ هى سنة الأساس، والسلسلة الثانية من سنة ١٩٩٢ حتى سنة ١٩٩٧ بإعتبار أن سنة ١٩٩٤ هى سنة الأساس.**

السنة	سلسلة الأرقام القياسية للإنتاج من سنة ١٩٨٨ حتى سنة ١٩٩٢ حيث: ١٩٨٨ = ١٠٠	سلسلة الأرقام القياسية للإنتاج من سنة ١٩٩٢ حتى سنة ١٩٩٧ حيث: ١٩٩٤ = ١٠٠
١٩٨٨	١٠٠	
١٩٨٩	١٠٥	
١٩٩٠	١١٠	
١٩٩١	١١٢	
١٩٩٢	١١٥	٩٠
١٩٩٣		٩٨
١٩٩٤		١٠٠
١٩٩٥		١٢٠
١٩٩٦		١٢٥
١٩٩٧		١٣٥

والمطلوب: دمج السلسلتين من الأرقام القياسية فى سلسلة واحدة.

الحل

بالنظر إلى السلسلتين السابقتين نلاحظ وجود رقمين قياسيين لسنه ١٩٩٢، لذلك نأخذ هذه السنة على أنها سنة الأساس فى كل من السلسلتين، وتتم عملية الدمج بأن نقسم الأرقام القياسية داخل كل سلسلة على حده على الرقم القياسى لسنة ١٩٩٢ بنفس السلسله فنحصل بذلك على سلسله متصلة من الأرقام القياسية بإعتبار أن سنة ١٩٩٠ هى سنة الأساس كما- يتضح من الجدول التالى:

السنة	السلسلة المبتورة الأولى ١٩٩٢ = ١٠٠	السلسلة المبتورة الثانية ١٩٩٢ = ١٠٠	السلسلة المتصلة الجديدة (ضم العمودين الثانى والثالث) ١٩٩٢= ١٠٠
١٩٨٨	٨٦,٩٦=١٠٠×(١١٥/١٠٠)		٨٦,٩٦
١٩٨٩	٩١,٣ =١٠٠×(١١٥/١٠٥)		٩١,٣
١٩٩٠	٩٥,٦٥=١٠٠×(١١٥/١١٠)		٩٥,٦٥
١٩٩١	٩٧,٣٩=١٠٠×(١١٥/١١٢)		٩٧,٣٩
١٩٩٢	١٠٠ =١٠٠×(١١٥/١١٥)	١٠٠ = ١٠٠×(٩٠/٩٠)	١٠٠
١٩٩٣		١٠٨,٨٩ =١٠٠×(٩٠/٩٨)	١٠٨,٨٩
١٩٩٤		١١١,١١=١٠٠×(٩٠/١٠٠)	١١١,١١
١٩٩٥		١٣٣,٣٣=١٠٠×(٩٠/١٢٠)	١٣٣,٣٣
١٩٩٦		١٣٨,٨٩=١٠٠×(٩٠/١٢٥)	١٣٨,٨٩
١٩٩٧		١٥٠=١٠٠×(٩٠/١٣٥)	١٥٠

وبخصوص السلسلة المتصلة الجديدة المتحصل عليها يمكن تعديل سنة الأساس من سنة ١٩٩٢ إلى أى سنة أخرى من سنوات السلسلة إذا رغبنا فى ذلك. كما سبق أن بينا.

الباب الثانى
الرقابة الإحصائية على الجودة

Statistical Quality Control

كثيراً ما يعتقد البعض بأن الوحدات المنتجة فى أى عملية صناعية قد يكون لها نفس مستوى الجودة، وهذا إعتقاد خاطىء، حيث أن هذه الوحدات المنتجة لايمكن بأى حال أن تكون متماثلة واذا كانت كذلك فهذا هو المتوقع. فعلى الرغم من وجود مواصفات معينة للمنتج النهائى الا ان ذلك لايمنع وجود إختلافات بين هذا المنتج والمواصفات الموضوعة فى خطة الأنتاج. فقد تختلف جودة المنتج من آلة الى اخرى أو من وردية إنتاج الى اخرى داخل المصنع الواحد. كذلك قد تظهر هذه الأختلافات فى المنتج من مصنع الى أخر أذا كان هذا المنتج يتم انتاجه فى اكثر من مصنع وذلك نتيجة لاختلاف الظروف المحيطة بالعملية الأنتاجية فى كلا المصنعين.

والامثلة العملية على توضيح مفهوم الرقابة الاحصائية على جودة الانتاج كثيرة ومتعدده، الا أن أفضل هذه الامثلة هو افتراض وجود اله لأنتاج المسامير بمواصفات معينة (طول معين للمسامير المنتجة) حيث يلاحظ انه من بين مجموعة كبيرة من المسامير المنتجة من نفس المادة الخام وتحت نفس الظروف الأنتاجية وجود بعض الوحدات المنتجة تختلف بصورة ملحوظة عن المواصفات الأنتاجية المقررة.

وتجدر الاشارة الى ان هذه الأختلافات لمادة ما يتم ارجاعهـا الـى سـببين اساسيين وهما:-

١- السبب الاول: اختلاف طبيعى مسموح به.

عوامل تؤدى الى وجود أختلافات فى مواصفـات المنتـج النهـائى وترجـع الى عامل الصدفة، وهذه الإختلافات ينبغى التوقع بوجودهـا حيـث تعـد أختلافـات طبيعية وجزء لايمكن فصله عن اى عمليـة انتاجيـة ولايمكـن السيطرة عليـه، أو منعه وبالتالى ليس هناك ما يبرر انفاق المال والوقت للعمل على التقليل منها.

٢- السبب الثانى: اختلاف غير طبيعى وغير مسموح به.

اختلافات ترجع الى عيب فى احد عوامل الانتاج المستخدمة فى العمليـة الأنتاجية، مثل وجود عمال غير مدربين أو عيوب فى المواد الخام المستخدمة فى الأنتاج أو وجود عيوب فى الآلات المستخدمة فى الأنتاج وما الى ذلك من عيوب الأنتاج الأخرى. ويلاحظ أن معظم هذه العيوب بل كلها يمكن السيطرة عليهـا أو التقليل منها.

وعموماً يمكن القول بأن العملية الإنتاجية فـى حالـة مراقبـة احصائيـة اذا كانت الأختلافات فى العمليـة الإنتاجيـة قـاصرة فقـط علـى السـبب الأول. السـابق ذكره.

أما اذا كانت هذه الأختلافات فى جودة الوحدات المنتجـة ناتجـة عـن أحـد عوامل السبب الثانى (اى وجود احد عيوب العملية الإنتاجية ذاتها) فى هذه الحالـة لايمكن القول بـأن العمليـة الانتاجيـة فـى حالـة مراقبـة احصائيـة، لـذا فـان الامـر

يتطلب سرعة التدخل من المسئولين عن الانتاج لمحاولة منع أو تقليل هذه الاختلافات قدر الامكان وذلك بجعل العملية الانتاجية فى حالة مراقبة احصائية فقط.

مما تقدم يمكننا تعريف المراقبة الأحصائية على جودة الانتاج بأنها الطريقة التى يتم استخدامها فى مراقبة جودة الانتاج وذلك عن طريق سحب عينات مناسبة من هذا الانتاج فضلاً عن تطبيق بعض الطرق والاساليب الاحصائية على نتائج هذه العينات وذلك بغية المحافظة على جودة هذا الانتاج. حيث يتم فحص وحدات المنتج النهائى المختاره فى العينة بمجرد انتاجها وبذلك يمكننا تصحيح اى انحراف فى العملية الانتاجية بمجرد حدوثه.

وعادة ما تتم عملية المراقبة الاحصائية على جودة الانتاج فى اجراء قسمين رئيسيين من العمليات.

القسم الاول: خرائط مراقبة جودة الانتاج **Quality Control Charts**

حيث تتم المراقبة بغرض تقييم الاداء الانتاجى ومنع اتمام انتاج معيب.

القسم الثانى: قبول العينات **Acceptance Sampling**

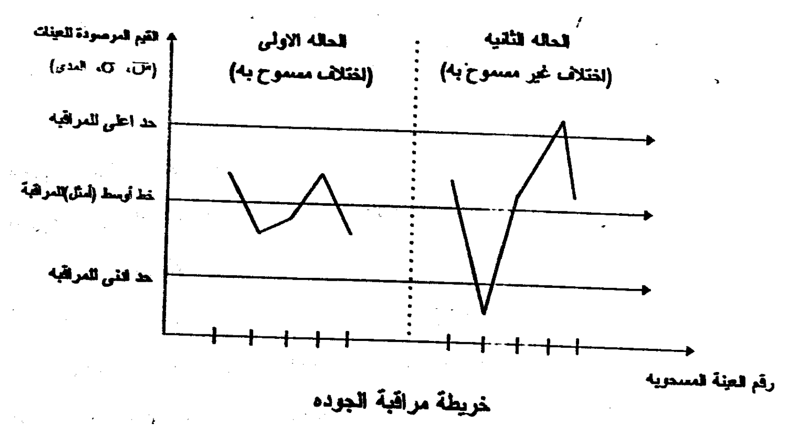
وهى اختبار المواد والوحدات المنتجة فعلاً لتقرير مدى صلاحيتها أو قبولها من عدمة. وفيما يلى شرح مختصر لكل قسم من أقسام المراقبة الاحصائية على جودة الأنتاج:

أولاً : خرائط مراقبة جودة الأنتاج

تقوم فكرة خرائط مراقبة جودة الانتاج اساساً على فحص عينات صغيرة متتابعة من الأنتاج يتم إختيارها بصفة دورية وعلى فترات منتظمة وذلك لدراسة الأختلافات الناتجه لمعرفة ما اذا كانت، هذه الاختلافات ترجع الى عوامل الصدفة (السبب الاول) أم أنها ناتجة عن عيب فى أحد عوامل الانتاج المستخدمة (السبب الثانى).

وتعد خرائط مراقبة الجودة طريقة بيانية لتمثيل قراءات خاصة بهذه العينات المسحوبة من الانتاج مثل (المتوسط، الانحراف المعيارى، المدى) علاوة على اعتماد هذه الخرائط على تحديد حدود للمراقبة (حد ادنى وحد أعلى) والذى يعبر الخروج عنهما دليل على وجود أختلافات فى جودة الأنتاج ترجع الى عيب فى أحد عوامل الانتاج (السبب الثانى) مما يستلزم التعرف على طبيعته والعمل على منعه أو تقليله. وبديهيا فاذا كانت القراءات الخاصة بالعينة المسحوبة داخل هذين الحدين (الادنى والاعلى للمراقبة) كان ذلك مؤشراً على ان الاختلافات الموجودة بالانتاج هى اختلافات عشوائية ترجع الى الصدفة (السبب الأول) وبالتالى ليس هناك ما يستدعى القلق بشأنها. ومعنى ذلك ان هذه الخرائط إنما توضح لمدير الأنتاج بمجرد القاء نظرة سريعة عليها ما اذا كانت عملية الأنتاج تحت المراقبة الأحصائية أم لأ.

ويوضح الشكل التالى صورة مبدئية لخريطة مراقبة جودة الانتاج والفرق بين نوعى الاختلافات فى جودة الانتاج.



خريطة مراقبة الجوده

واضح من الشكل السابق بحالتيه الاولى والثانية أن الاختلافات فى الحالة الاولى هى اختلافات طبيعية مسموح بها طالما ان القراءات المسجلة تقع داخل حدى المراقبة (الادنى والاعلى) وبالتالى يمكننا تجاهل مثل هذا الاختلافات حيث انها ترجع الى عوامل الصدفة، اما الأختلافات، فى الحالة الثانية فتعد اختلافات غير طبيعية وغير مسموح بها وبالتالى لابد من البحث فى اسبابها والعمل على إزالتها أو التقليل منها حتى تتحول العملية الإنتاجية إلى حالة المراقبة احصائية ،كما فى الحالة الاولى.

ويلاحظ ايضا من الشكل السابق انه كان معروفاً لدينا المعايير أو المقاييس المطلوبة للأنتاج والتى أمكننا عن طريقها تحديد الحد الادنى والاعلى لمراقبة الجودة. الا انه فى كثير من الأحيان لايكون معروفاً لدينا حدود المراقبة، الامر الذى يستلزم تحديدها وذلك من واقع البيانات المستخلصة من العينات المسحوبة من الأنتاج.

وعلى ذلك يمكننا القول بأن هناك العديد من أنواع خرائط مراقبة جودة الأنتاج والتى ينبغى علينا التعرض لها بشىء من التفصيل:

أنواع خرائط المراقبة على الجودة

النوع الأول: اذا كانت هناك معايير محددة مسبقاً للأنتاج

ويكون الهدف الاساسى لهذا النوع هو معرفة ما اذا كانت القيم المرصودة من العينات المسحوبة من الأنتاج (المتوسط، الأنحراف المعيارى، المدى) تختلف عن القيم أو المعايير المحددة للأنتاج مسبقاً أم لا. وتعد هذه النوعية من الخرائط نوعية لاتواجهة اية مشاكل أو عقبات فى التطبيق حيث ان معايير أو حدود المراقبة محدده سلفاً.

النوع الثانى: اذا لم تكن هناك معايير محددة مسبقاً للانتاج

ويكون الهدف الرئيسى من هذه الخرائط هو بيان ما اذا كانت القيم المرصودة من العينات المسحوبة تختلف عن بعضها البعض بمقدار أكبر من أن يرجع الى عوامل الصدفة، طالما لم تكن هناك حدود مسبقة لمراقبة الأنتاج. ولما كانت جودة الانتاج قد تكون مقياساً لطول أو وزن أو حجم وحدات الانتاج أو قد تكون ذات صفة غير قابلة للقياس رقمياً كأن يشترط ان تكون الوحدات المنتجة بمواصفات معينة بحيث اذا توفرت فى الوحدات المنتجة اعتبرت هذه الوحدات سليمة واذا لم تتوفر فى الوحدات اعتبرت غير مطابقة للمواصفات، لذا يظهر لدينا نوعين من خرائط المراقبة وهما خرائط مراقبة للمتغيرات (فى حالة

المواصفات القابلة للقياس الكمى) وأيضا خرائط مراقبة للمواصفات (فى حالة المواصفات الغير قابلة للقياس الكمى) وفيما يلى شرح مبسط لكل من خرائط مراقبة المتغيرات وخرائط مراقبة المواصفات وذلك فى ظل النوع الثانى من خرائط المراقبة.

(I) خرائط المراقبة للمتغيرات:

وتنقسم هذه النوعية من خرائط مراقبة الجوده الى ثلاثة أنواع من الخرائط وهى:

أولاً: خرائط المراقبة للمتوسط ($\bar{س}$) [باستخدام متوسط الانحرافات المعيارية]

لتوضيح ذلك النوع من الخرائط، نفترض انه لدينا عدد من العينات ذات الحجم (ن) مأخوذة من الانتاج (مأخوذة من المجموعات الفرعية) يساوى (ك) وكانت متوسطات هذه العينات هى $\bar{س}_1$، $\bar{س}_2$، ....، $\bar{س}_ك$

فاذا رمزنا لاحد المجموعات بالرمز (هـ) فان متوسط هذه المجموعة يحسب على النحو التالى

$$\bar{س}_{هـ} = \frac{\sum_{ر=1}^{ك} س_{هـ ر}}{ن} \quad ، هـ = 1، 2، 3، ...... ك$$

وكانت الانحرافات المعيارية المحسوبة من العينات هى $\hat{\sigma}_1$، $\hat{\sigma}_2$...، $\hat{\sigma}_ك$

حيث يحسب الانحراف المعيارى للمجموعة الفرعية (هـ) على النحو التالى:

$$\hat{\sigma}_{هـ} = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_{هـ ر} - \bar{س}_{هـ})^2}{ن}} \quad ، هـ = 1، 2، 3، ...... ك$$

اما المدى المحسوب من العينات هى $ى_1$، $ى_2$، .....، $ى_ك$ على الترتيب حيث يحسب المدى للمجموعة الفرعية (هـ) باستخدام العلاقة التالية:

$ى_{هـ}$ = اكبر قيمة فى المجموعة (هـ) - أصغر قيمة فى المجموعة (هـ)

وكذلك يمكن تمثيل الخط الاوسط فى خريطة مراقبة الجودة للمتوسط باستخدام المتوسط العام ($\bar{\bar{س}}$) والذى يمكن حسابه باستخدام العلاقة التالية:

$$\bar{\bar{س}} = \frac{\bar{س}_1 + \bar{س}_2 + \ldots\ldots + \bar{س}_ك}{ك}$$

وبالتالى يمكن تحديد الحدان الأعلى والادنى لهذه الخريطة على النحو التالى:

الحد الاعلى للمراقبة = $\bar{\bar{س}} + أ_1 \bar{\hat{\sigma}}$

الحد الادنى للمراقبة = $\bar{\bar{س}} - أ_1 \bar{\hat{\sigma}}$

حيث $\bar{\hat{\sigma}}$ تشير الى متوسط الانحرافات المعيارية للمجموعات الفرعية يمكن حسابها باستخدام العلاقة التالية:

$$\bar{\hat{\sigma}} = \frac{\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2 + \ldots + \hat{\sigma}_ك}{ك}$$

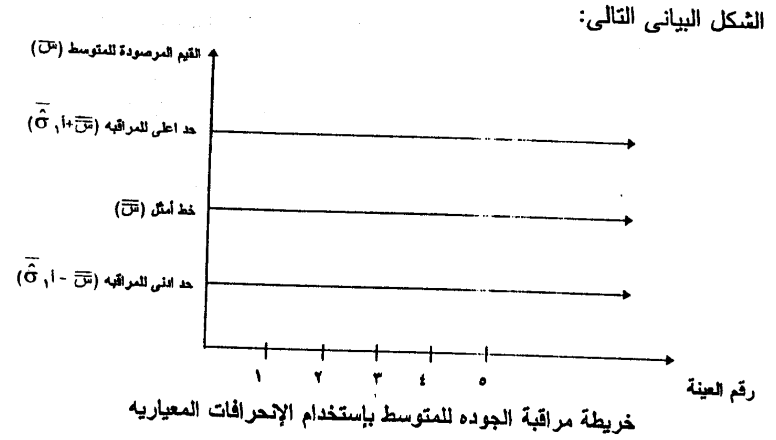
و$أ_1$ ثابت يتوقف على حجم العينة (المجموعة الفرعية) ويتم الحصول عليه من جدول ثوابت خرائط مراقبة الجودة (بالملاحق)

وتجدر الاشارة الى أن قيمة الثابت

$أ_1 = \frac{3}{\sqrt{ن\ جـ_2}}$ حيث $جـ_2$ مقدار ثابت يتحدد بشرط أن

ت $\left(\frac{\bar{\hat{\sigma}}}{\text{ج}_{2}}\right) = \sigma$ (والـــذى يمثـل الانحراف المعيـارى للمجتمـــع الأصلى المسحوب منه العينات).

وبالتالى يمكن توضيح خريطـة مراقبـة الجـودة للمتوسـط (س̿) باسـتخدام الشكل البيانى التالى:



خريطة مراقبة الجوده للمتوسط بإستخدام الإنحرافات المعياريه

أما فى حالة إستخدامنا لمتوسط مدى المجموعـات الفرعيـة، فـإن الحـدان الاعلى والادنى فى خريطة مراقبة جودة المتوسط يتم حسابها على النحو التالى:

الحد الاعلى للمراقبة = س̿ + أ٢ ق̄

الحد الادنى للمراقبة = س̿ − أ٢ ق̄

حيث تشير ق̄ الى المدى المتوسط (متوسط الامدية) للمجموعـات الفرعيـة ويمكن ايجاده باستخدام العلاقة التالية:

$$\bar{ى} = \frac{ى_{1} + ى_{2} + \dots\dots + ى_{ك}}{ك}$$

أما $أ_{2}$ يشير الى ثابت العلاقة ويتم الحصول عليه من جدول ثوابت خرائط مراقبة الجودة ويتوقف ايضاً على حجم العينة المسحوبة من الانتاج.

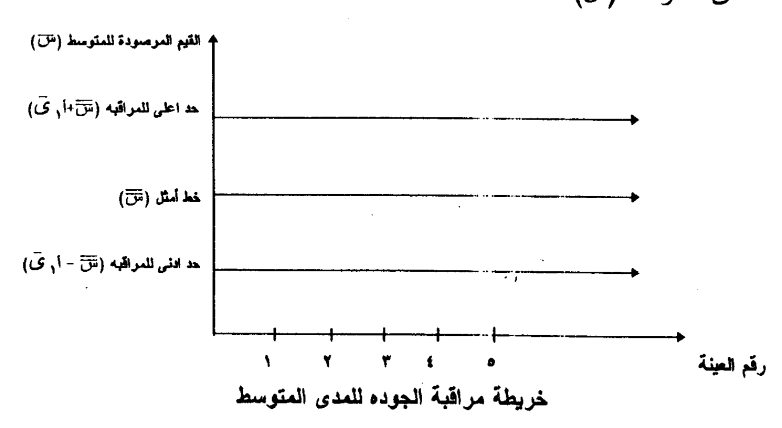
وتجدر الملاحظة ايضاً الى أن هذا الثابت

$$أ_{2} = \frac{3}{ع_{2}\sqrt{ن}}$$

حيث $ع_{2}$ مقدار ثابت يتحدد بشرط أن:

$$ت\left(\frac{\bar{ى}}{ع_{2}}\right) = \sigma$$

ويوضح الشكل البيانى التالى صورة لخريطة مراقبة الجودة باستخدام المدى المتوسط ($\bar{س}$):



خريطة مراقبة الجوده للمدى المتوسط

ثانياً : خريطة مراقبة الجودة للإنحراف المعيارى ($\hat{\sigma}$):

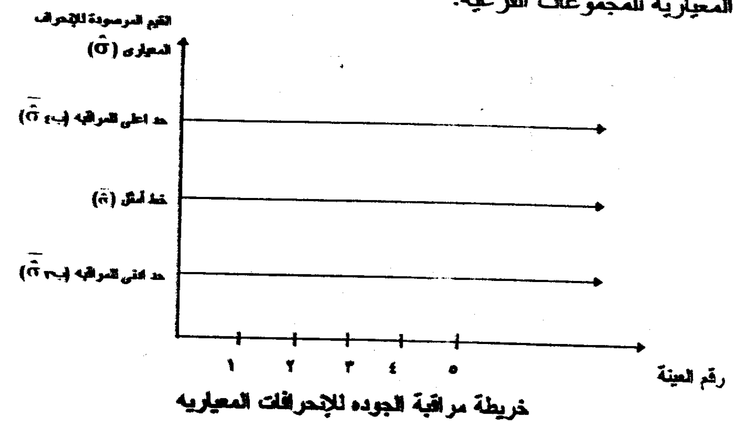
فى هذا النوع من الخرائط يقع الخط الامثل (الأوسط) عند متوسط الإنحرافات المعيارية للمجموعات الفرعية، بينما يتم تحديد الحدان الاعلى والادنى على النحو التالى:

الحد الأدنى للمراقبة = ب٣ $\bar{\hat{\sigma}}$

الحد الأعلى للمراقبة = ب٤ $\bar{\hat{\sigma}}$

حيث ب٣، ب٤ ثوابت يتم الحصول عليها من جدول ثوابت خرائط مراقبة الجودة (بالملاحق) ويعتمدان ايضاً على حجم العينة المسحوبة من الانتاج.

ويوضح الشكل البيانى التالى صوره لخريطة مراقبة الجودة للانحرافات المعيارية للمجموعات الفرعية:



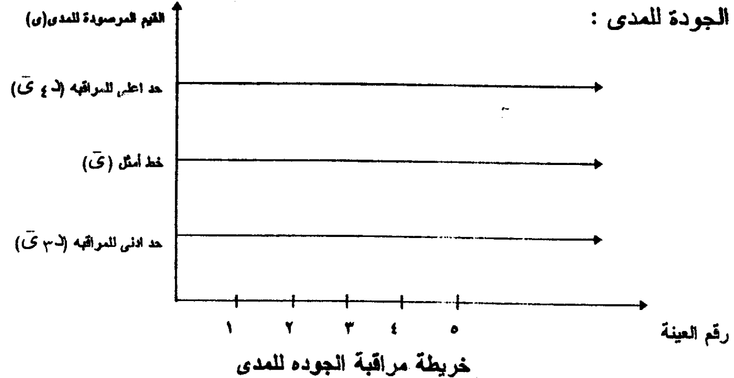
خريطة مراقبة الجوده للإنحرافات المعياريه

ثالثاً : خريطة مراقبة الجودة للمدى (ى)

أيضا فى هذا النوع من الخرائط يتم تحديد كل من الحد الامثل وكذلك الحد الاعلى والادنى على النحو التالى:

الحد الامثل	= ى̅
الحد الاعلى للمراقبة	= د٤ ى̅
الحد الادنى للمراقبة	= د٣ ى̅

حيث د٣، د٤، ثوابت يمكن الحصول عليها ايضا من جدول ثوابت خرائط مراقبة الجودة (بالملاحق) ويوضح الشكل البيانى التالى صوره لخريطة مراقبة الجودة للمدى :



خريطة مراقبة الجوده للمدى

وغنى عن البيان انه لكى تكون عملية مراقبة جودة الانتاج متكاملة (بالنسبة للمتوسط وللتشتت) فلابد من عمل خريطة مراقبة جودة للمتوسط (س̅) وايضاً يجب عمل اى من خرائط مراقبة الجودة سواء للانحراف المعيارى ($\hat{\sigma}$) أو للمدى (ى).

مثال(١)

أخذت ٢٠ عينة عشوائية حجم كل منها ٤ مفردات على فترات زمنية بواقع $\frac{1}{2}$ ساعه من انتاج مخرطه والجدول التالى يوضح أقطار الوحدات المنتجة بالبوصة.

رقم العينة	المشاهدات			
	١	٢	٣	٤
١	١٤	٢٥	١٩	١٨
٢	١٦	٢٢	٢٠	١٩
٣	١٢	٢٤	١٥	٢٤
٤	١٧	١٨	٢٣	٢١
٥	١٩	٢١	١٦	٢١
٦	١٧	١٨	١٦	١٥
٧	٢٢	١٩	١٥	١٤
٨	٢٠	١٨	٢١	٢٣
٩	٢١	١٧	٢٠	١٧
١٠	١٦	٢٠	٢٢	١٧
١١	١٩	١٨	٢١	٢٠
١٢	١٣	١٩	٢٠	١٨
١٣	٢٢	١٩	٢١	١٨
١٤	١٦	٢١	١٧	١٩
١٥	٢٣	١٥	١٥	١٦
١٦	٢٢	٢٠	٢٠	١٩
١٧	٢٣	١٧	١٨	١٩
١٨	١٩	٢٢	٢١	١٨
١٩	٢٥	١٧	٢٤	٢٠
٢٠	١٦	١٨	١٤	٢١

والمطلوب : تصميم خرائط مراقبة الجودة لكل من المتوسط والتشتت بنوعيها (الانحراف المعيارى والمدى)

الحل:

أولا : تصميم خريطة مراقبة الجودة للمتوسط ($\bar{س}$)

أ- باستخدام الانحراف المعيارى($\hat{\sigma}$)

خطوات الحل : يتم ايجاد القيم التالية:

١- الحد الامثل(المتوسط العام)= $\bar{\bar{س}} = \frac{\bar{س}_1 + \bar{س}_2 + \ldots\ldots + \bar{س}_{٢٠}}{٢٠} = \frac{٣٨٠}{٢٠} = ١٩$

١- متوسط الانحرافات $(\hat{\bar{\sigma}}) = \frac{\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2 + \ldots\ldots + \hat{\sigma}_{٢٠}}{٢٠} = \frac{٤٩,٢}{٢٠} = ٢,٤٦$

٣- إيجاد القيمة الجدولية $أ_1$ من جدول ثوابت خرائط المراقبة عند(حجم عينة=٤)

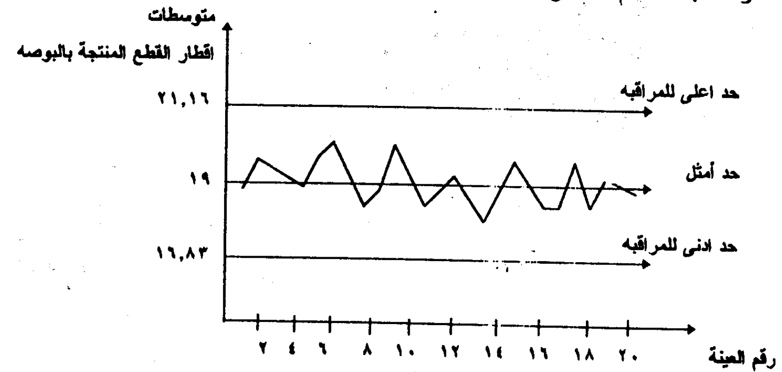
$أ_1 = ٠,٨٨$

٤- الحد الادنى = $\bar{\bar{س}} - أ_1 \hat{\bar{\sigma}}$

$= ١٩ - ٠,٨٨ \times ٢,٤٦ = ١٩ - ٢,١٦٤٨ = ١٦,٨٣٥$

٥- الحد الاعلى = $\bar{\bar{س}} + أ_1 \hat{\bar{\sigma}} = ١٩ + ٢,١٦٤٨ = ٢١,١٦٤٨$

بالاستعانة بالحدود السابقة للمراقبة يمكن تصميم خريطة مراقبة الجودة للمتوسط باستخدام الانحراف المعيارى على النحو التالى :



التعليق:

يلاحظ أن جميع النقط فى الخريطة تقع بين حدى المراقبة، مما يدل علـى أن العملية الأنتاجية فى حالة مراقبة احصائيـة. بمعنـى ان الأختلافـات الموجـودة بين المتوسطات ترجع الى عامل الصدفة.

ب- باستخدام المدى

خطوات الحل : يتم ايجاد القيم الاتية:

١- الحد الامثل = $\bar{\bar{س}}$ = ١٩

٢- المدى المتوسط ($\bar{ى}$) = $\frac{ى_١ + ى_٢ + \ldots\ldots + ى_{٢٠}}{٢٠}$ = $\frac{١٢٦}{٢٠}$ = ٦,٣

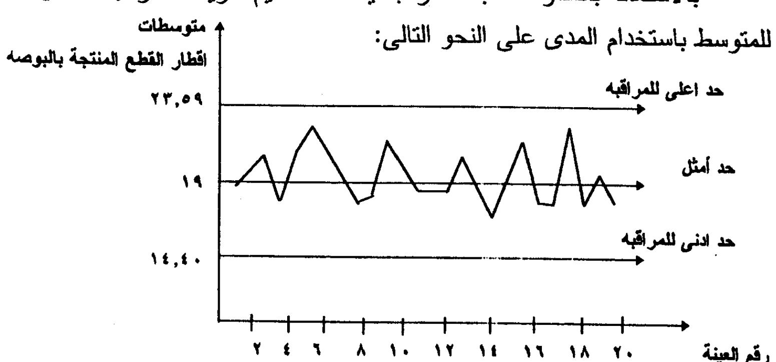
٣- إيجاد القيمة الجدولية $أ_٢$ عند حجم عينة = ٤ $أ_٢$ = ٠,٧٢٩

٤- الحد الادنى = $\bar{\bar{س}}$ - $أ_٢ \bar{ى}$ = ١٩ - ٠,٧٢٩(٦,٣)

= ١٩ - ٤,٥٩ = ١٤,٤٠

٥- الحد الأعلى = $\bar{\bar{س}}$ + $أ_٢ \bar{ى}$ = ١٩ + ٤,٥٩ = ٢٣,٥٩

بالاستعانة بالحدود السابقة للمراقبة يمكننا تصميم خريطة مراقبه الجودة للمتوسط باستخدام المدى على النحو التالى:



التعليق:

يلاحظ ان جميع النقط فى الخريطة تقع بين حدى المراقبة، مما يدل على خضوع عملية الانتاج للمراقبة الاحصائية كما هو الحال فى الخريطة السابقة.

ثانياً : تصميم خريطة مراقبة الجودة للانحراف المعيارى ($\hat{\sigma}$):

خطوات الحل : يتم إيجاد القيم الاتية:

١- ايجاد قيمة ب٣، ب٤ من جدول ثوابت المراقبة عند حجم عينة = ٤ بالملاحق وكانت على الترتيب

ب٣ = صفر ، ب٤ = ٢,٢٦

٢- الحد الامثل = $\bar{\hat{\sigma}}$ = ٢,٤٦

٣- الحد الادنى للمراقبة = ب٣ $\bar{\hat{\sigma}}$ = صفر (٢,٤٦) = صفر

٤- الحد الاعلى للمراقبة = ب٤ $\bar{\hat{\sigma}}$ = ٢,٢٩ (٢,٤٦) = ٥,٥٧٤

يمكن بذلك تصميم خريطة مراقبة الجودة للانحراف المعيارى باستخدام الحدود السابقة على النحو التالى:

الإنحراف المعيارى لأقطار القطع المنتجة بالبوصه

حد اعلى للمراقبه

حد أمثل

حد ادنى للمراقبه

٥,٥٧٤

٢,٤٦

صفر

٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ ١٢ ١٤ ١٦ ١٨ ٢٠

رقم العينة

التعليق:

أيضاً يمكننا من خلال نظرة سريعة على خريطة مراقبة الجودة للمدى ملاحظة ان جميع النقط تقع داخل حدى المراقبة مما يعنى ان العملية الانتاجية تحت المراقبة الاحصائية وهذا ما تؤكده الانواع المختلفة لمراقبة الجودة سواء للمتوسط أو للتشتت. أن الاختلافات الموجودة فى العملية الأنتاجية يمكن ارجاعها لعوامل الصدفة فقط وهذا الامر لايستدعى بحث عوامل هذا الاختلاف وأسبابه.

والجدول التالى يوضح القيم التى تم استخدامها فى تصميم خرائط مراقبة الجودة السابقة.

رقم العينة	مجـ س	$\bar{س}$	$\hat{\sigma}$	ى
١	٧٦	١٩	٣,٩	١١
٢	٧٧	١٩,٢٥	٢,٢	٦
٣	٧٥	١٨,٧٥	٥,٤	١٢
٤	٧٩	١٩,٧٥	٢,٤	٦
٥	٨٢	٢٠,٥٠	٣,٦	١٠
٦	٦٦	١٦,٥٠	١,١	٣
٧	٧٠	١٧,٥٠	٣,٢	٨
٨	٨٢	٢٠,٥٠	١,٨	٥
٩	٧٥	١٨,٧٥	١,٨	٤
١٠	٧٥	١٨,٧٥	٢,٤	٦
١١	٧٨	١٩,٥٠	١,١	٣
١٢	٧٠	١٧,٥٠	٢,٧	٧
١٣	٨٠	٢٠,٠٠	١,٦	٤
١٤	٧٣	١٨,٢٥	١,٩	٥
١٥	٦٩	١٧,٢٥	٣,٣	٨
١٦	٧١	٢٠,٢٥	١,١	٣
١٧	٧٧	١٩,٢٥	٢,٣	٦
١٨	٨٠	٢٠,٠٠	١,٦	٤
١٩	٨٦	٢١,٥٠	٣,٢	٨
٢٠	٦٩	١٧,٢٥	٢,٦	٧
المجموع	١٥٠	٣٨٠	٤٩,٢	١٢٦

مثال(٢)

فيما يلى البيانات الخاصة بالمتوسطات ($\bar{س}$) والمـدى (ى) لعشـرة عينـات تحتوى كل منها على ٥ مفردات.

المطلوب : عمل خريطة مراقبة الجودة للمتوسط (س) والمدى (ى)

الجموعة الفرعية	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
$\bar{س}$	٣٥,٨	٣٨,٤	٣٤,٠	٣٥,٠	٣٣,٨	٣١,٦	٣٣,٠	٢٨,٢	٣١,٨	٣٥,٦
ى	٤	٤	١٤	٤	٧	٥	٥	٣	٩	٦

الحل:

(أ) خريطة المراقبة للمتوسط ($\bar{س}$):

خطوات الحل

١- $\bar{\bar{س}} = \frac{\sum_{ر=١}^{١٠} \bar{س}_ر}{١٠} = \frac{٣٣٧,٢}{١٠} = ٣٣,٧٢$

٢- $\bar{ى} = \frac{\sum_{ر=١}^{١٠} ى_ر}{١٠} = \frac{٦١}{١٠} = ٦,١$

٣- الحد الأمثل = $\bar{\bar{س}}$ = ٣٣,٧٢

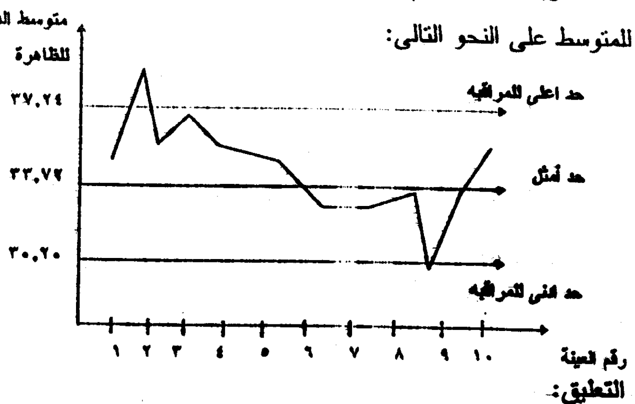
٤- الحد الأعلى للمراقبة = $\bar{\bar{س}} + أ_٢ \bar{ى}$ = ٣٣,٧٢ + ٠,٥٧٧(٦,١)=

= ٣٣,٧٢ + ٣,٥١٩ = ٣٧,٢٤

٥- الحد الادنى للمراقبة = $\bar{\bar{س}} - أ_٢ \bar{ى}$ = ٣٣,٧٢ - ٣,٥١٩ = ٣٠,٢٠

حيث $أ_٢$ (عند حجم عينة = ٥) = ٠,٥٧٧

ويمكن استخدام الحدود السابقة فى تصميم خريطة مراقبة الجودة للمتوسط على النحو التالى:



التعليق:-

باستعرض خريطة مراقبة الجودة السابقة لوحظ ان بعض الاحداثيات قد وقعت خارج حدى المراقبة وهذا واضح لمتوسط العينتين الثانية والثامنة مما يدل على أن العملية الانتاجية ليست تحت المراقبة الاحصائية، بمعنى ان هناك سبباً (غير مسموح به) قد أدى الى وجود مثل هذه الأختلاف. لذا فان الأمر يتطلب من مدير الانتاج البحث عن سبب هذه الاختلافات والعمل على معالجتها والتخلص منها.

ب- خريطة المراقبة للمدى (ى):

خطوات الحل:

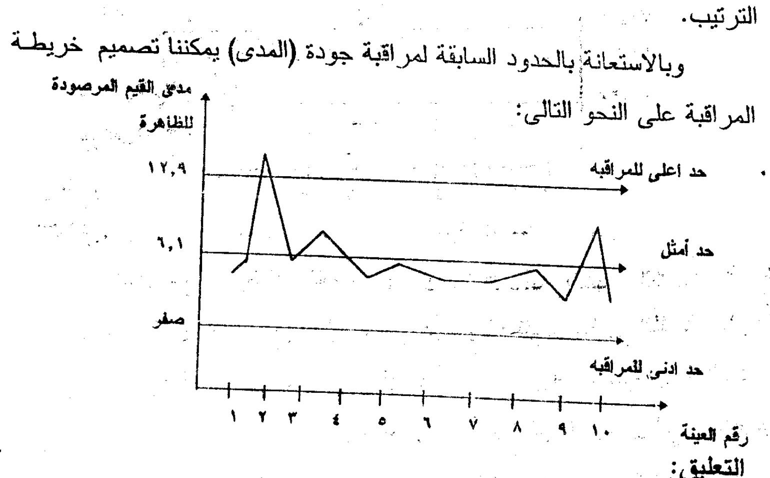
١- الحد الامثل = ىَ = ٦,١

٢- الحد الاعلى للمراقبة = د٤ ىَ = ٢,١١٥ (٦,١) = ١٢,٩

٣- الحد الادنى للمراقبة = د٣ ق = صفر (٦,١) = صفر

حيث د٣ ، د٤ عند عينه قدرها ٥ مفردات = صفر، ٢,١١٥ على الترتيب.

وبالاستعانة بالحدود السابقة لمراقبة جودة (المدى) يمكننا تصميم خريطة المراقبة على النحو التالي:



التعليق:

أيضاً بمشاهدة الخريطة السابقة للمراقبة الجودة يلاحظ وجود بعض النقط التى تقع خارج الحد الاعلى للمراقبة وخصوصاً عند العينة الثالثة مما يشير الى وجود اختلافات (غير مسموح بها) فى الانتاج وان العملية الأنتاجية ليست فى حالة مراقبة احصائية (عشوائية) مما يستوجب على مدير الأنتاج بحث اسباب ذلك الأختلاف والعمل على ازالته.

مثال (٣)

الجدول الاتى يبين العمر بالساعات لعشر عينات يتكون كل منها من ٦ مصابيح كهربائية، سحبت كل نصف ساعة من العملية الانتاجية

والمطلوب:

عمل خريطة مراقبة المتوسط ($\bar{\text{س}}$) وأيضا خريطة مراقبة المدى (ى).

الحل

بحساب متوسط ومدى كل من المجموعات الفرعية نحصل على :

$$\bar{\bar{\text{س}}} = \frac{\bar{\text{س}}_{١} + \bar{\text{س}}_{٢} + \bar{\text{س}}_{٣} + \text{........} + \bar{\text{س}}_{\text{ك}}}{\text{ك}}$$

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٦٢٠	٥٠١	٦٧٣	٦٤٩	٤٩٤	٦٣٤	٦١٩	٦٣٠	٤٨٢	٧١٦
٦٨٧	٥٨٥	٧٠١	٧٢٦	٩٨٤	٧٥٥	٧١٠	٧٢٣	٧٩٠	٥٢٤
٦٦٦	٥٢٤	٦٨٦	٥٧٢	٦٥٩	٦٦٤	٦٦٤	٦١٤	٥٣٣	٦٢٦
٦٥٩	٥٨٥	٥٦٧	٦٢٨	٦٤٣	٥٨٢	٦٩٣	٥٣٥	٦١٢	٥٠٣
٧٣٨	٦٥٣	٦١٩	٦٣١	٦٦٠	٦٨٣	٧٧٠	٥٥٠	٤٩٧	٦٦١
٦٨٦	٦٦٨	٦٦٠	٧٤٣	٦٤٠	٥٥٥	٥٣٤	٥٧٠	٤٩٩	٧٥٤

$$\bar{\bar{\text{س}}} = \frac{\text{٦٨١+٥٨٦+٦٥١+٦٤١+٦٨٠+٦٣٩+٦٦٥+٦٠٤+٥٦٩+٦٢٩}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٦٣٤٦}}{\text{١٠}} = \text{٦٤٣,٦}$$

$$\bar{\text{ى}} = \frac{\text{ى}_{١} + \text{ى}_{٢} + \text{ى}_{٣} + \text{..........} + \text{ى}_{\text{ك}}}{\text{ك}}$$

$$= \frac{\text{١١٨+١٦٧+١٣٤+١٧١+٤٩٠+٢٠٠+٢٣٦+١٨٨+٣٠٩+٢٥١}}{\text{١٠}} = \frac{\text{٢٢٦٤}}{\text{١٠}} = \text{٢٢٦,٤}$$

من جدول ثوابت خرائط مراقبة الجودة وأمام ن = ٦ نجد أن

أ$_{٢}$ = ٠,٤٨٣ ، د$_{٣}$ = صفر ، د$_{٤}$ = ٢,٠٠٤

وعلى ذلك فان الحدان الاعلى والادنى لخريطة مراقبة المتوسط ($\overline{\overline{س}}$) هما :

الحد الأعلى للمراقبة = $\overline{\overline{س}}$ + أ$_{٢}$ $\overline{ى}$

= ٦٣٤,٦ + (٠,٤٨٣) ٢٢٦,٤

= ٦٣٤,٦٠ + ١٠٩,٣٥ = ٧٤٣,٩٥

الحد الادنى للمراقبة = $\overline{\overline{س}}$ - أ$_{٢}$ $\overline{ى}$

= ٦٣٤,٦ - (٠,٤٨٣) ٢٢٦,٤

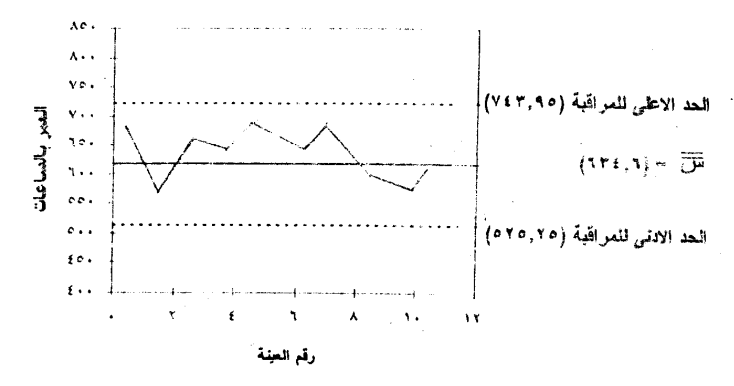
= ٦٣٤,٦٠ - ١٠٩,٣٥ = ٥٢٥,٢٥

كذلك فان الحدان الاعلى والادنى لخريطة مراقبة المدى (ى) هما :

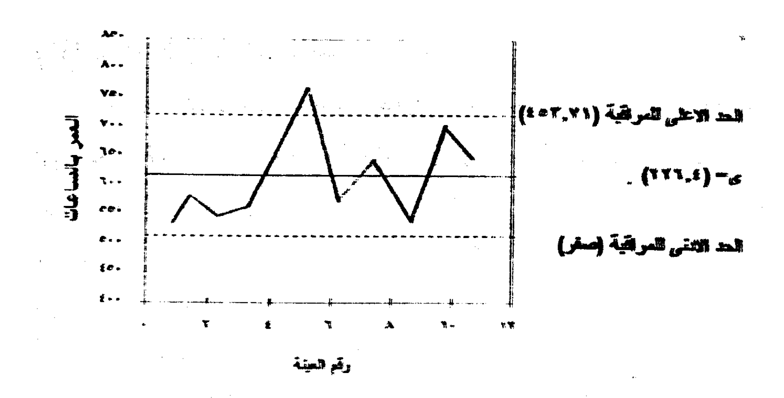
الحد الأعلى للمراقبة = د$_{٤}$ $\overline{ى}$ = ٢,٠٠٤ (٢٢٦,٤) = ٤٥٣,٧١

الحد الادنى للمراقبة = صفر (٢٢٦,٤) = صفر

بالاستعانة بالحدود السابقة للمراقبة تكون خريطتى المراقبة للمتوسط كما يلى:



خريطة مراقبة المتوسط ($\overline{\overline{س}}$)



خريطة مراقبة للمدى (ى)

وحيث أن جميع النقط فى خريطة مراقبة المتوسط (س̄) تقع بين حدى المراقبة فإن هذا يعنى ان العملية فى حالة مراقبة احصائية بمعنى أن الاختلافات الموجودة بين المتوسطات ترجع الى الصدفة بينما نجد فى خريطة مراقبة المدى أن جميع النقط عدا نقطة واحدة (العينة الخامسة) تقع داخل حدود المراقبة.

ولذلك فإن الامر يتطلب من مدير الانتاج البحث عن سبب ذلك والعمل على ازالته .

(II)، خرائط المراقبة للمواصفات.

فى هذا المبحث سوف نناقش كيفية تصميم خرائط مراقبة جودة الأنتاج فى حالة ما اذا كانت مواصفات المنتج النهائى غير قابلة للقياس، اى اذا كان سبب الاختلاف نوعى وليس كمى. فى هذه الحالة يمكن مراقبة جودة الأنتاج بواسطة بعض خرائط مراقبة الجودة الاخرى مثل خرائط مراقبة نسبة المعيب فى الانتاج وخرائط مراقبة عدد العيوب.

أ- خرائط مراقبة نسبة الأنتاج المعيب.

لتصميم هذا النوع من الخرائط لابد أولا من تقسيم الأنتاج الى نوعين من المنتجات أولهما منتجات صالحة (مطابقة للمواصفات) وثانيهما منتجات غير صالحة (غير مطابقة للمواصفات). وفى أحيان اخرى نجد أنه قد يكون هناك اكثر من مقياس كمى لجودة الوحدات المنتجة. وبالتالى فان استخدام خرائط مراقبة الجودة سواء للمتوسط أو للتشتت والسابق التنويه عنهما تكون مرتفعة النفقات لاننا سوف نحتاج الى خرائط منفصلة لكل مقياس.

لذلك فاننا نستخدم خرائط المراقبة لنسبة المعيب والتى تعتمد فقط على تصنيف الوحدات المنتجة الى وحدات صالحة وأخرى معيبة. فإذا كان عدد الوحدات المعيبة فى العينة يساوى (م)، فإن نسبة الوحدات المعيبة فى العينة والتى سنرمز لها بالرمز (θ) تحسب كما يلى:

$$\text{نسبة الوحدات المعيبة} = \frac{\text{عدد الوحدات المعيبة}}{\text{عدد المفردات}}$$

أى أن:

$$\theta = \frac{م}{ن}$$

وعلى ذلك فلعمل خريطة مراقبة نسبة الوحدات المعيبة نقوم بسحب عينات متتابعة على فترات منتظمة ذات حجم معين (نفضل ألا يقل عن ٥٠ مفردة) ثم نحسب نسب المعيب لكل منها.

كما يحسب خط الوسط (الحد الأمثل) لخريطة المراقبة في هذه الحالة على النحو التالي:

$$\theta = \frac{\text{عدد الوحدات المعيبة لكل العينات}}{\text{العدد الكلى لوحدات العينات}}$$

أو

$$\theta = \frac{\theta_{١} + \theta_{٢} + ... + \theta_{ك}}{ك}$$

أما الحدان الأعلى والأدنى لمراقبة الجودة فيمكن حسابها باستخدام العلاقات الآتية:-

$$\text{الحد الاعلى للمراقبة} = \theta + ٣\sqrt{\frac{\theta\,(١-\theta)}{ن}}$$

$$\text{الحد الادنى للمراقبة} = \theta - ٣\sqrt{\frac{\theta\,(١-\theta)}{ن}}$$

مثال(٤)

فيما يلي بيان بعدد الوحدات المعيبة في ١٠ عينات تحتوى كل منها على ١٠٠ مفردة.

العينة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد المعيب	١٠	٩	١١	١٠	٧	٨	٩	٦	١٢	٨

المطلوب:

١- تصميم خريطة مراقبة جودة لنسبة المعيب

٢- بيان ما اذا كان الأنتاج فى حالة مراقبة احصائية ام لا.

الحل

١- تصميم خريطة مراقبة لنسبة الوحدات المعيبة

لعمل خريطة مراقبة نسبة الوحدات المعيبة فان الامر يتطلب حساب نسبة الوحدات المعيبة بكل عينة من العينات المسحوبة كما سيظهر فى الجدول التالى مع العلم بأن حجم كل عينة يساوى ١٠٠ مفردة

رقم العينة	عدد الوحدات المعيبة (م)	نسبة الوحدات المعيبة(θ)
١	١٠	١٠/١٠٠ = ٠,١٠
٢	٩	٩/١٠٠ = ٠,٠٩
٣	١١	١١/١٠٠ = ٠,١١
٤	١٠	١٠/١٠٠ = ٠,١٠
٥	٧	٧/١٠٠ = ٠,٠٧
٦	٨	٨/١٠٠ = ٠,٠٨
٧	٩	٩/١٠٠ = ٠,٠٩
٨	٦	٦/١٠٠ = ٠,٠٦
٩	١٢	١٢/١٠٠ = ٠,١٢
١٠	٨	٨/١٠٠ = ٠,٠٨

$$\theta = \frac{\text{عدد الوحدات المعيبة لكل العينات}}{\text{العدد الكلى لوحدات العينات}} = \frac{٩٠}{١٠٠٠} = ٠,٠٩$$

أو

$$\bar{\theta} = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{10}}{10} = \frac{\text{٠,١٠}+\text{٠,٠٩}+\dots+\text{٠,٠٨}}{\text{١٠}} = \text{٠,٠٩}$$

وبالتالي يمكن حساب حدى المراقبة كما يلى:

$$\text{الحد الاعلى للمراقبة} = \bar{\theta} + \text{٣}\sqrt{\frac{\bar{\theta}\,(\text{١}-\bar{\theta})}{\text{ن}}}$$

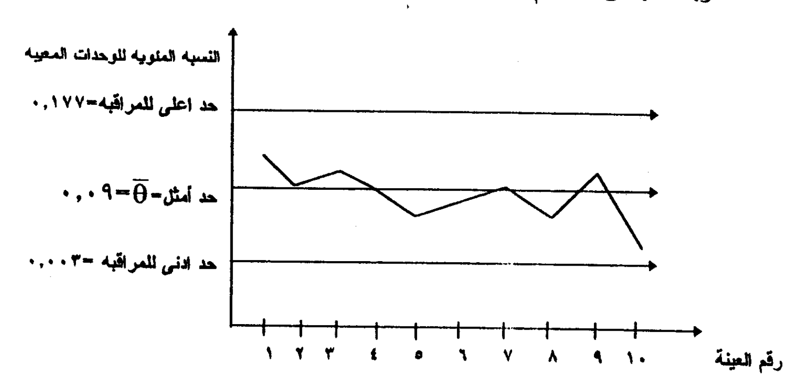
$$= \text{٠,٠٩} + \text{٣}\sqrt{\frac{\text{٠,٠٩}\,(\text{١}-\text{٠,٠٩})}{\text{ن}}}$$

$$= \text{٠,٠٩} + \text{٠٠,٠٨٧} = \text{٠,١٧٧}$$

$$\text{الحد الادنى للمراقبة} = \bar{\theta} - \text{٣}\sqrt{\frac{\bar{\theta}\,(\text{١}-\bar{\theta})}{\text{ن}}}$$

$$= \text{٠,٠٩} - \text{٠,٠٨٧} = \text{٠,٠٠٣}$$

وبذلك يمكن تصميم خريطة النسبة على النحو التالى:



التعليق:

بالقاء نظرة سريعة على الخريطة السابقة لمراقبة النسبة يلاحظ ان جميع النقط تقع داخل حدى المراقبة، الامر الذى يظهر ان العملية الانتاجية تحت المراقبة الأحصائية وأن الاختلافات الموجودة تعتبر من الأختلافات المسموح بها.

ب- خرائط مراقبة عدد العيوب بالانتاج

عادة ما تستخدم خرائط مراقبة عدد العيوب والتى سوف نرمز لها بالرمز(λ) فى مراقبة عدد العيوب الممكن حدوثها فى الوحده الواحدة مثل عدد العيوب الموجودة بقطعة قماش منتجة أو عدد العيوب الموجودة بسيارة عند نهاية عملية التجميع وما الى ذلك.

ويلاحظ أنه عند تصميم خريطة مراقبة عدد العيوب تستخدم توزيع البواسون (Poisson Distribution). وذلك لأن فى كل وحدة منتجة يلاحظ أن عدد العيوب الممكنة قد يكون كبيراً جداً بينما احتمال حدوث اى منها صغيراً جداً وبالتالى فإن عدد العيوب فى الوحدة يعتبر متغيراً عشوائياً يتبع توزيع البواسون. وبالتالى فان حدود المراقبة فى هذه الحالة يمكن صياغتها على النحو التالى :

الحد الامثل (خط الوسط) = λ = $\frac{\text{عدد العيوب}}{\text{عدد الوحدات}}$

الحد الادنى للمراقبة = λ - ٣ $\sqrt{\lambda}$

الحد الاعلى للمراقبة = λ + ٣ $\sqrt{\lambda}$

مثال(٥)

فى أحد مصانع المنسوجات الصوفية أراد مدير الانتاج أن يضع نظام لمراقبة جودة الانتاج فأخذ عينة من ٢٥ قطعة من أنتاج أسبوع معين وفحصت هذه القطع بدقة وحصرت عدد العيوب فيها بجميع أنواعها من عيوب ويبين الجدول التالى عدد هذه العيوب والمطلوب تصميم خريطة مراقبة الجودة لعدد العيوب وبيان ما اذا كان الانتاج فى حالة مراقبة احصائية أم لا.

القطع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣
عدد العيوب	٢	٣	٦	٣	١	٨	٢	٥	٢	٤	٥	٩	٣
القطعة	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	المجموع
عدد العيوب	٥	٣	٣	٢	٧	٤	٣	٩	١	٢	٦	٣	١٠٠

الحل:

المتوسط = الحد الامثل = λ = عدد العيوب / عدد الوحدات (القطع) = ١٠٠ / ٢٥ = ٤

الحد الادنى للمراقبة = $\lambda - 3\sqrt{\lambda}$

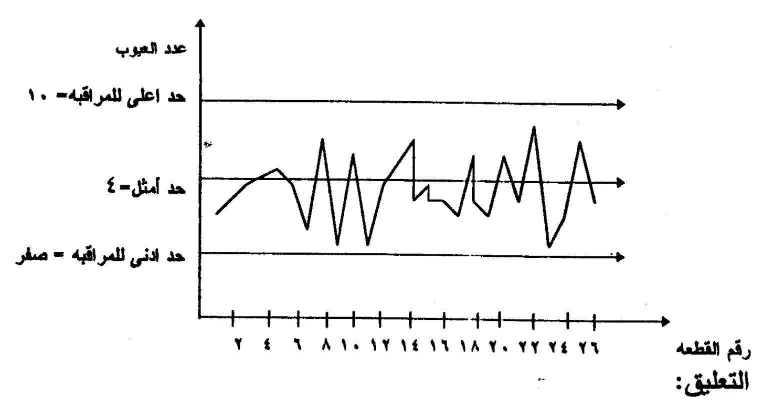
= ٤ − ٣ $\sqrt{4}$ = ٤ − ٦ = صفر

ملاحظه اعتبر الحد الادنى لخريطة المراقبة فى هذه الحالة = صفر وذلك لأن عدد العيوب لايمكن أن تكون سالبة.

الحد الاعلى للمراقبة = $\lambda + 3\sqrt{\lambda}$

= ٤ + ٣ $\sqrt{4}$ = ١٠

وبالتالى يمكن تصميم خريطـة مراقبـة الجـودة لعـدد العيـوب علـى النحـو التالى:



التعليق:

يلاحظ ان جميـع النقـط تقـع داخـل حـدى المراقبـه وبالتـالى يمكـن لمديـر الانتاج ان يقرر ان الأنتاج فـى حالـة مراقبـة احصائيـة وأن الاختلافـات الموجودة بالانتاج إنما هى اختلافات طبيعية (مسموح بها) وليس هناك اى مـبرر للتغلب عليها ومحاولة ازالتها حيث انها ترجع الى الصدفة.

مثال (٦)

فيما يلى عدد الوحدات المعيبة فى ١٠ عينات تحتوى كل منها على ١٠٠ وحدة.

العينة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الوحدات المعيبة	١٢	١٠	٦	٨	٩	٩	٧	١٠	١١	٨

والمطلوب:

١) عمل خريطة مراقبة لنسبة الوحدات المعيبة

٢) عمل خريطة مراقبة لعدد الوحدات المعيبة

٣) بين ما اذا كانت عملية الانتاج فى حالة مراقبة احصائية أم لا

الحل

أولاً : خريطة مراقبة نسبة الوحدات المعيبة

لعمل خريطة مراقبة نسبة الوحدات المعيبة فان الامر يتطلب حساب نسبة الوحدات المعيبة فى العينات العشر المذكورة كما يظهر فى المجدول الاتى:

رقم العينة	عدد الوحدات المعيبة	نسبة الوحدات المعيبة
١	١٢	٠,١٢
٢	١٠	٠,١٠
٣	٦	٠,٠٦
٤	٨	٠,٠٨
٥	٩	٠,٠٩
٦	٩	٠,٠٩
٧	٧	٠,٠٧
٨	١٠	٠,١٠
٩	١١	٠,١١
١٠	٨	٠,٠٨

ل = ٩٠ / ١٠٠٠ = ٠,٠٩٠ أو = ٠,٩٠ / ١٠ = ٠,٠٩

ونحسب حدا المراقبة الاعلى والادنى كما يلى:

الحد الاعلى للمراقبة = ل + ٣ √(ل (١−ل) / ن)

= ٠,٠٩ + ٣ √(٠,٠٩ × ٠,٩١ / ١٠٠)

= ٠,٠٩ + ٣ (٠,٠٢٩)

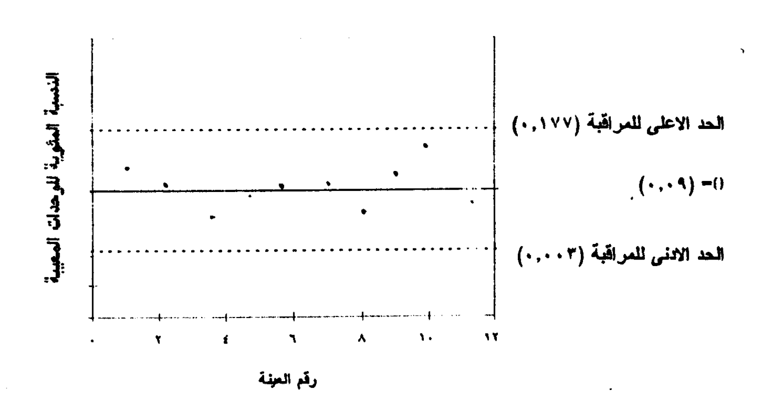
= ٠,٠٩ + ٠,٠٨٧ = ٠,١٧٧

الحد الادنى للمراقبة = ل − ٣ √(ل (١−ل) / ن)

= ٠,٠٩ − ٣ (٠,٠٢٩)

= ٠,٠٩٠ − ٠,٠٨٧ = ٠,٠٠٣

وبذلك تكون خريطة مراقبة نسبة الوحدات المعيبة كما يلى :



خريطة مراقبة نسبة الوحدات المعيبة

ثانياً: خريطة مراقبة عدد الوحدات المعيبة:

الحد الاوسط ن λ = ١٠٠ × ٠,٠٩ = ٩

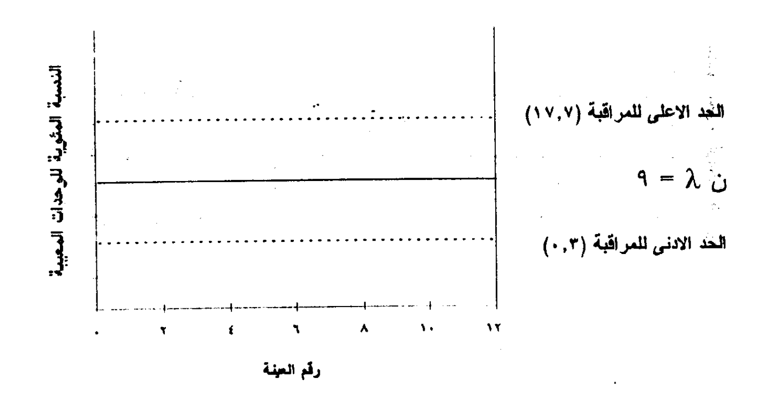
الحد الاعلى للمراقبة = ن λ + ٣ ن (λ) (١- λ)

= ١٠٠ (٠,١٧٧) = ١٧,٧

الحد الأدنى للمراقبة = ن λ - ٣ ن (λ) (١- λ)

= ١٠٠ (٠,٠٠٣) = ٠,٣

وتكون خريطة مراقبة عدد الوحدات المعيبة كما يلى :



خريطة مراقبة عدد الوحدات المعيبة

ثالثاً : يتضح من خريطتى مراقبة نسبة وعدد الوحدات المعيبة أن جميع النقط تقع داخل حدود المراقبة ولذلك فانه يمكن القول ان العملية فى حالة مراقبة احصائية.

تمرين (١٠):

أخذت ١٠ عينات تحتوى كل منها على ١٠٠ وحدة من عملية انتاجية معينة وحسبت عدد الوحدات المعيبة بكل منها وكانت كما يلى:

العينة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الوحدات المعيبة	١	٢	٣	٤	٢	١	٠	١	٢	٠

والمطلوب : عمل خريطة مراقبة لنسبة الوحدات المعيبة ثم علق على حالة المراقبة الاحصائية للعملية الانتاجية.

تمرين (١١):

أخذت ٢٠ مجموعة (عينة) تتكون كل منها من ٥٠ جهاز راديو من عملية انتاجية معينة بطريقة عشوائية وسجلت عدد الاجهزة المعيبة فى كل مجموعة وكانت النتائج المتحصل عليها كما يلى :

رقم المجموعة	عدد الوحدات المعيبة فى المجموعة	رقم المجموعة	عدد الوحدات المعيبة فى المجموعة
١	٤	١١	٤
٢	٥	١٢	٩
٣	٦	١٣	٨
٤	٧	١٤	٩
٥	٧	١٥	١٠
٦	٥	١٦	١٢
٧	٤	١٧	١٠
٨	١٢	١٨	١٢
٩	١٠	١٩	١١
١٠	٤	٢٠	١١

والمطلوب: عمل خريطة المراقبة المناسبة وبيان حالـة العمليـة الانتاجيـة مـن حيث المراقبة الاحصائية.

قبول العينات: Acceptance Sampling

أما المجال الثانى الهام فى تطبيق مراقبة الأنتاج هو نظم العرض بالعينة، وهذا يتضمن كيفية تنظيم أخذ العينات من مجموعة معينة بغرض التوصل الى قرار ما، فعند الأتفاق على الصفقات المختلفة ولكى يستطيع المشترى قبول استلام شحنات الانتاج المتفق عليه أو رفض هذا الأستلام فأنه ينص فى العقد على عدة أمور من بينهما:

(أ) الإتفاق بين الطرفين على نسبة معيبة أو عدد معين من الوحدات المعيبة والتى لايمكن للمشترى تسلم الشحنة أذا زادت نسبة الوحدات المعيبة أو عددها عن المتفق عليه.

(ب) الأتفاق على نوع الأجراء الذى يمكن أتخاذه فى حالة تجاوز (نسبة المعيب أو عدده النسبة المتفق عليها وفى هذه الحالة قد يمكن الاتفاق على أحد أمريين:

الأول: من حق المشترى عدم إستلام الشحنة نهائياً.

الثانى: أن يقبل المشترى الشحنة بعد استبعاد الوحدات المعيبة منها.

ومن الواضح ان ذلك يتطلب فحص كل الوحدات لاستبعاد تلك الوحدات المعيبة من الشحنة مما يتطلب تكلفة مادية عادة ما ينص العقد على أن يتحملها أحدهما أو كلاهما.

(جـ) الأتفاق على حجم العينة وكذلك عدد العينات التى يتم سحبها من كل شحنة وكذلك قد يتفق على ضرورة أخذ عينات اضافية وإذا عجزنا عن أتخاذ قرار بناء على نتائج العينات الأولى.

(د) قد يتفق فى حالة عدم الوصول الى قرار نهائى بشأن استلام أو عدم أستلام الشحنة بعد المعاينة فى البند (جـ) على الأستمرار فى أخذ عينات متتالية من الشحنة لكى يصلا معاً الى قرار بشأن قبول أو عدم قبول استلام الشحنة من طرف المشترى.

وفى هذه الحالة نجد أنه كلما كانت نتائج العينات الاولى مرضية كلما كان حجم العينة صغيراً وبالعكس فإن حجم العينة يتزايد.

كلما كانت النتائج غير مرضية فى العينات الأولى.

مما سبق يمكننا تقسيم أنواع المعاينة الى:

١ – المعاينة الواحدة أو المفردة: Single Sampling

وفيها يتم أتخاذ القرار بشأن استلام أو عدم أستلام الشحنة بناء على عينة واحدة فقط وباستخدام عينة واحدة ذات الحجم (ن) بطريقة عشوائية ويتم فحص العينة. فإذا أحتوت العينة المسحوبة على (م) وحدة معيبة أو أقل فإنه يتم قبول الشحنة من قبل المشترى أما أذا احتوت العينة على أكثر من (م) وحدة معيبة، كان ذلك مؤشراً لرفض الشحنة وعدم استلامها.

٢ – المعاينة المزدوجة Double Sampling

فى هذه الحالة يتم سحب عينة أولى حجمها ($ن_١$) بطريقة عشوائية ويتم فحصها، فإذا أحتوت هذه العينة على ($م_١$) وحدة معيبة أو أقل فإن الشحنة

يتم أستلامها. إما أذا أحتوت على أكثر من ($م_2$) وحدة معيبة فأن الشحنة يتـم رفضها. اما أذا أحتوت العينة الأولى على عدد من الوحدات المعيبة يـتراوح بيـن ($م_1$)، ($م_2$) أى أكبر مـن ($م_1$) وأقل مـن ($م_2$) فإنــه يتـم سـحب عينــة عشوائية ثانية حجمهـا ($ن_2$)، ثـم مقارنـة العـدد الكلـى للوحـدات المعيبـة فـى العينتين بمقدار ($م_2$) فأذا كان هذا العدد أقل مـن أو يسـاوى ($م_2$) يتـم قبـول الشحنة أما أذا كان العدد الكلى للوحدات المعيبة فى العينتيـن أكـبر مـن ($م_2$) كان ذلك مبرراً لاتخاذ قرار برفض الشحنة ويمكن توضيح ذلك رمزيـاً كمـا يلى:

أولاً : فى حالة المعاينة المفردة:

اذا كان (غ) تمثل عدد الوحدات المعيبة فى العينة ذات الحجم ($ن_1$) فإن:

اذا كانت غ ≥ م فإننا نقبل الشحنة

أما أذا كانت غ > م فأنه يتم رفض الشحنة وعدم استلامها.

ثانياً: فى حالة المعاينة المزدوجة:

أذا كـانت ($غ_1$) هـى عـدد الوحـدات المعيبـة فـى العينـة الأولـى ($غ_2$) تمثـل عـدد الوحدات المعيبة فى العينة الثانية فأنه:

أذا كانت $غ_1$ ≥ $م_1$ فإنه يتم قبول الشحنة

أذا كانت $غ_1$ > $م_2$ فأنه يتم رفض الشحنة

أما أذا كانت $م_2$ > $غ_1$> $م_1$.

فإنه يتم سحب عينة ثانية ذات الحجم ($ن_2$) وتتم المقارنة فى هذه الحالة:

فإذا كانت $غ_1$+ $غ_2$ ≥ $م_2$ تقبل الشحنة

أما أذا كانت $غ_1 + غ_2 > م_2$ ترفض الشحنة

ويمكن توضيح ذلك المفهوم عن طريق المثال التالى:

مثال (٧)

اذا كانت لدينا البيانات التالية:

$ن = ١٥٠$ ، $ن_1 = ١٠٠$ ، $ن_2 = ٢٠٠$ ،

$م = ٤$ ، $م_1 = ٢$ ، $م_2 = ٥$

ففي حالة المعاينة المفردة نجد أنه:

أذا كان $غ \leq ٤$ تقبل الشحنة

أما أذا كان $غ > ٤$ فأننا نرفض الشحنة.

أما فى حالة المعاينة المزدوجة نجد أنه

إذا كانت $غ_1 \leq ٢$ فإننا نقبل الشحنة

أما إذا كانت $غ_1 > ٥$ فإننا نرفض الشحنة

وأخيراً اذا كانت

$٥ > غ_1 > ٢$

فأننا نقوم بسحب عينة ثانية حجمها $ن_2$ وتكون المقارنة كما يلى

فإذا كانت $غ_1 + غ_2 \leq ٥$ فأننا نقبل الشحنة.

أما إذا كانت $غ_1 + غ_2 > ٥$ فإنه يتم رفض الشحنة.

التمارين غير المحلولة

تمرين (٨):

أخذت عشرة عينات عشوائية تحتوى كل منها على ١٠٠ وحدة من عملية انتاجية وحسبت عدد الوحدات المعيبة بكل منها وكانت كما يلى:

رقم العينة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الوحدات المعيبة	٣	٤	٥	١	٨	٠	٦	١	٣	٤

المطلوب:

(١) تصميم خريطة مراقبة الجودة لنسبة المعيب.

(٢) بيان ما أذا كانت عملية الإنتاج فى حالة مراقبه احصائية أم لا.

تمرين (٩):

أخذت ١٢ عينة تتكون كل منها من خمسة أجهزة تلفزيونية من أحدى العمليات الإنتاجية وسجلت عدد العيوب بكل جهاز فكانت على النحو التالى:

العينة (الجهاز)	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
عدد العيوب	١١	١١	١٢	١٠	١٢	١٠	٩	٨	٩	٤	٥	٧

المطلوب:

(١) تصميم خرائط المراقبة لعدد العيوب.

(٢) بيان هل العملية الإنتاجية فى حالة مراقبة إحصائية أم لا ؟.

المقارنة بين المواصفات الموضوعة

للانتاج وحدود الانتاج الطبيعية

انتهينا فى الجزء السابق من كيفية عمل خرائط المراقبة للمتغيرات وذلك بالنسبة للمتوسط (س) وللإنحراف المعيارى ($\hat{\sigma}$) وللمدى ى وكذلك عمل خرائط المراقبة للمواصفات لنسبة وعدد الوحدات المعيبة (θ ، λ) على الترتيب وذلك بغرض معرفة ما اذا كانت العملية الصناعية تحت الدراسة فى حالة مراقبة احصائية أولاً.

وننتقل الان الى نقطة أخرى لا تقل اهمية عما سبق دراسته وهى كمية التأكد من أن العملية الانتاجية تتفق والمواصفات الموضوعة للانتاج. ففى كثير من العمليات الصناعية، قد تكون هناك مواصفات محددة لما يجب ان تكون عليه حدود الانتاج وترغب ادارة المصنع فى معرفة ما اذا كانت الحدود الطبيعية للانتاج تتفق مع حدود المواصفات، حيث يعنى تساوى حدود المواصفات مع الحدود الطبيعية للأنتاج أن العملية الانتاجية تتم بشكل طبيعى وأن النسبة من الانتاج الخارجة عن حدود المواصفات (أو الحدود الطبيعية للانتاج فى هذه الحالة) لا تمثل عنصر قلق بالنسبة لادارة المصنع حيث أنها أمر طبيعى وجزء لا يتجزأ من أى عملية صناعية وبالتالى لا يستدعى الامر اتخاذ أجراء أو بذل جهد لازالتها والتغلب عليها.

اما اذا كانت الحدود الطبيعية للانتاج تزيد عن حدود المواصفات الموضوعة له بمعنى أنها تقع خارج حدود المواصفات فان معنى هذا ان هناك نسبة معينة من الانتاج تقع خارج حدود المواصفات ترجع الى أسباب غير عادية ونصب اهتمامنا فى هذه الحالة على تقدير هذه النسبة الخارجة عن المواصفات ومعرفة اسبابها للعمل على تقليلها والقضاء عليها.

وأخيرا فان الحدود الطبيعية للانتاج قد تقع حدود المواصفات الموضوعة للانتاج وهذا يعنى أن الانتاج لم يصل بعد الى المستوى المرغوب فيه مما يتطلب سرعة التدخل للوصول بالانتاج الى المواصفات المطلوبة.

وقد سبق أن ذكرنا أنه اذا كانت البيانات تتوزع توزيعا طبيعيا فإن ٩٩,٧٣٪ من البيانات تقع بين μ ± ٣ σ حيث ترمزان μ ، σ الى المتوسط والانحراف المعيارى للتوزيع المعتدل.

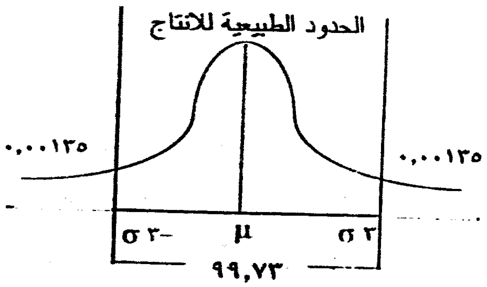
وعلى ذلك فان الحدود الطبيعية للانتاج تختلف من عملية صناعية الى أخرى تبعا لما تعرف به هذه الحدود فعلى سبيل المثال اذا عرفت الحدود الطبيعية للانتاج بأنها تلك التى تحتوى داخلها على ٩٩.٧٣٪ من الانتاج بمعنى أن ٠,٢٧٪ من الانتاج يقع خارجها فانه يمكن كتابتها على النحو التالى:

μ ± ٣ σ

حيث μ + ٣ σ هى الحد الأعلى

μ − ٣ σ هى الحد الأدنى

ويظهر ذلك كما فى الشكل التالى:



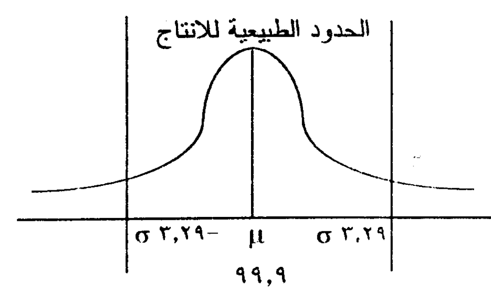
أما اذا عرفت الحدود الطبيعية للانتاج بانها تلك الحدود التى تتضمن داخلها ٩٩,٩٠٪ من الانتاج بمعنى أن ٠,١٠٪ يقع خارجها فانها تكون كما يلى:-

$\mu \pm ٣,٢٩$

حيث $\mu + ٣,٢٩$ هى الحد الأعلى

$\mu - ٣,٢٩$ هى الحد الأدنى

ويظهر ذلك كما فى الشكل التالى:



وفى كثير من الأحيان، يكون متوسط التوزيع غير معلوم، فى هذه الحالة يمكن استخدام $\bar{\bar{س}}$ (متوسط المتوسطات للعينات المسحوبة) كتقدير غير متحيز له أى أن:

ت ($\bar{\bar{س}}$) = μ

وبالمثل عندما يكون الانحراف المعيارى للمجتمع σ غير معلوم فان تقديرا غير متحيز له يمكن الحصول عليه كما يلى:

(١) $\frac{\bar{\sigma}}{ح_٢}$ حيث $\bar{\sigma}$ (متوسط الانحرافات المعيارية للمجموعات الفرعية)،

$ح_٢$ ثابت يتوقف على حجم العينة ويتحدد بشرط

$$\sigma = \frac{\sigma}{ح_2} \text{ ت} \quad \text{أو}$$

(٢) $\frac{\bar{ى}}{ء_2}$ حيث $\bar{ى}$ (المدى المتوسط) ،

$ء_2$ ثابت يتوقف على حجم العينة ويتحدد بشرط

$$\sigma = \frac{\bar{ى}}{ء_2} \text{ ت}$$

وبافتراض أن متوسط المجتمع μ يساوى التقدير غير المتحيز له ($\bar{\bar{س}}$)، وأن الانحراف المعيارى للمجتمع يساوى التقدير غير المتحيز له ($\frac{\bar{\sigma}}{ح_2}$ أو $\frac{\bar{ى}}{ء_2}$) فان حدود الانتاج الطبيعية تكون كما يلى :

$$\bar{\bar{س}} \pm ٣ \left(\frac{\bar{\sigma}}{ح_2}\right) \quad \text{أو}$$

(أ) $\bar{\bar{س}} \pm ٣ \left(\frac{\bar{ى}}{ء_2}\right)$

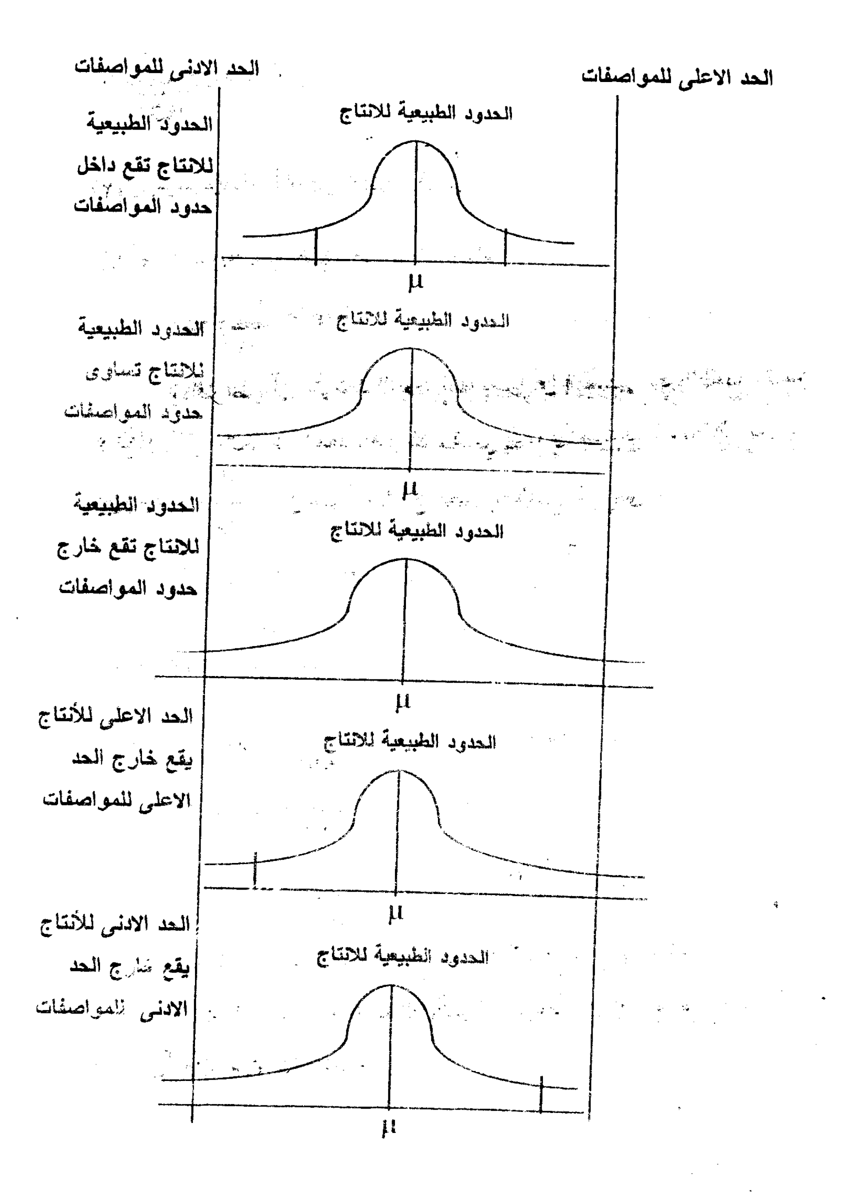
وذلك اذا تضمنت هذه الحدود ٩٩,٧٣٪ من الانتاج الكلى أو

(ب) $\bar{\bar{س}} \pm ٣,٢٩ \left(\frac{\sigma}{ح_2}\right)$

$$\bar{\bar{س}} \pm ٣,٢٩ \left(\frac{\bar{ى}}{ء_2}\right)$$

وذلك اذا تضمنت هذه الحدود ٩٩,٩٧٪ من الانتاج الكلى.

والاشكال الاتية توضح الحالات المختلفة للحدود الطبيعية للانتاج وحدود المواصفات الموضوعة.



الحد الادنى للمواصفات
الحد الاعلى للمواصفات
الحدود الطبيعية للانتاج تقع داخل حدود المواصفات
الحدود الطبيعية للانتاج
μ
الحدود الطبيعية للانتاج تساوى حدود المواصفات
الحدود الطبيعية للانتاج
μ
الحدود الطبيعية للانتاج تقع خارج حدود المواصفات
الحدود الطبيعية للانتاج
μ
الحد الاعلى للأنتاج يقع خارج الحد الاعلى للمواصفات
الحدود الطبيعية للانتاج
μ
الحد الادنى للأنتاج يقع خارج الحد الادنى للمواصفات
الحدود الطبيعية للانتاج
μ

وفيما يلى بعض الامثلة:

مثال (١٢)

ينتج مصنع نوعا من المنتجات بمواصفات معينة (٢٠±٢) كيلو جرام للوحدة. فاذا علمت أن حدود الانتاج الطبيعية تتضمن ٩٩,٩٪ من الانتاج وأن μ = ٢٠,٤٠ ، σ = ١

والمطلوب:

١) معرفة اذا كانت الحدود الطبيعية للانتاج تتفق والمواصفات الموضوعة.

٢) تحديد نسبة الانتاج الخارجة عن المواصفات – اذا كانت الحدود الطبيعية للانتاج تزيد عن حدود المواصفات الموضوعة.

الحل

١) الحد الاعلى للمواصفات = ٢٠ + ٢ = ٢٢ كيلو جرام

الحد الادنى للمواصفات = ٢٠ – ٢ = ١٨ كيلو جرام

وحيث أن حدود الانتاج الطبيعية تحتوى على ٩٩,٩٪ من الانتاج لذلك فأن :

الحد الطبيعى الاعلى للانتاج = μ + ٣,٢٩ σ

= ٢٠,٤٠ + ٣,٢٩ (١)

= ٢٣,٦٩ كيلو جرام

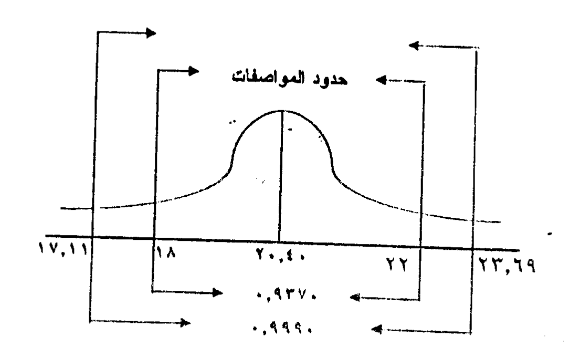
، الحد الطبيعى الادنى للانتاج = μ – ٣,٢٩ σ

= ٢٠,٤٠ – ٣,٢٩ (١)

= ١٧,١١ كيلو جرام

ويبين الشكل التالى حدود المواصفات والحدود الطبيعية للانتاج

الحدود الطبيعية للانتاج



وواضح من الرسم أن الحدود الطبيعية للانتاج تقع خارج حدود المواصفات ومعنى هذا أن هناك نسبة من الانتاج خارج المواصفات الموضوعة والتى ترجع لاسباب غير عادية (المنطقة المظللة فى الشكل السابق). ولذلك فيجب اما تغيير العملية الانتاجية أو تعديل المواصفات للانتاج.

٢) من الشكل السابق نجد أن المساحة المحصورة بين الحدين الطبيعيين الادنى والاعلى للانتاج هى ٩٩,٩٠٪.

ولتحديد المساحة بين حدى المواصفات ٢٢، ١٨ توجد الدرجة المعيارية المقابلة لـ ٢٢ وكذلك الدرجة المعيارية المقابلة لـ ١٨ ثم نوجد المساحة المقابلة من جدول التوزيع الطبيعى المعيارى كما يلى:

الدرجة المعيارية المقابلة لـ ٢٢ = $\frac{٢٢,٠٠-٢٠,٤٠}{١}$ = $\frac{١,٦٠}{١}$ = ١,٦

الدرجة المعيارية المقابلة لـ ١٨ = $\frac{١٨,٠٠-٢٠,٤٠}{١}$ = $\frac{-٢,٤٠}{١}$ = -٢,٤

المساحة المقابلة لـ ١,٦ هى ٠,٤٤٥٢، المساحة المقابلة لـ ٢,٤ هى ٠,٤٩١٨ وبذلك فان مجموع المساحتين = ٠,٤٤٥٢+٠,٤٩١٨ = ٠,٩٣٧٠

وبذلك تكون النسبة الخارجة عن المواصفات هى :

٠,٩٩٩٠ – ٠,٩٣٧٠ = ٠,٠٦٢٠ أو ٦,٢٠٪ من الانتاج الكلى.

مثال (١٣)

اذا كانت حدود المواصفات لمنتج معين هى ١,٥٣٠ ±٠,٠٠٣ وأن حدود الانتاج الطبيعى تتضمن ٩٩,٧٣٪ من الانتاج الكلى فأذا علمت أن μ = ١,٥٣٠ ، σ = ٠,٠٠١

والمطلوب:

١) معرفة مدى مطابقة الحدود الطبيعية للانتاج لحدود المواصفات الموضوعة.

٢) هل هناك نسبة من الانتاج خارجة عن المواصفات نتيجة لأسباب غير عادية.

الحل

١) الحد الاعلى للمواصفات = ١,٥٣٠ + ٠,٠٠٣ = ١.٥٣٣

الحد الادنى للمواصفات = ١,٥٣٠ – ٠,٠٠٣ = ١.٥٢٧

وحيث أن حدود الانتاج الطبيعية تحتوى داخلها على ٩٩.٧٣٪ من الانتاج الكلى لذلك فأن :

الحد الاعلى الطبيعى للانتاج = μ + ٣ σ

= ١,٥٣٠ + ٣(٠,٠٠١)

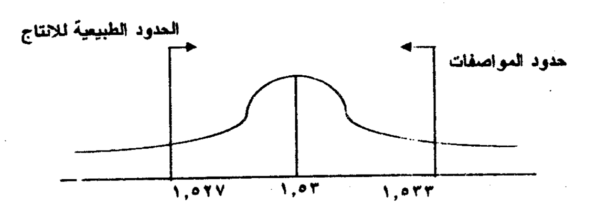
= ١,٥٣٣ ،

، الحد الادنى الطبيعى للانتاج = μ − ٣ σ

= ١,٥٣٠ − ٣(٠,٠٠١)

= ١,٥٢٧

أى أن الحدود الطبيعية للانتاج تتفق مع حدود المواصفات الموضوعة كما يتضح من الشكل التالى :



ويتضح من الرسم أن الحدود الطبيعية للانتاج = حدود المواصفات وأن النسبة من الانتاج الخارجة عنهما وهى ٢٧٪ ترجع لاسباب عادية فى العملية الانتاجية. وعلى ذلك فانه لا توجد أى نسبة من الانتاج خارجة عن المواصفات لاسباب غير عادية.

مثال (١٤)

استخرجت البيانات الاتية من ٢٠ عينة (تحتوى كل منها على ٥ مفردات) اخــذت على فترات دورية من العملية الانتاجية لمنتج معين فــاذا علمت أن المواصفـــات الموضوعة للانتاج هــى ٣٤,٢٥±٢,٢٠ وأن $\bar{\bar{س}}$ = ٣٣,٥٥ ، $\bar{ى}$ = ٦,٢٠ وأن حدود الانتاج الطبيعية تعرف بأنها تلك التى تتضمن ٩٩,٧٣٪ من البيانات.

والمطلوب:

١) معرفة ما اذا كانت الحدود الطبيعية للانتاج تتفق والمواصفات الموضوعة.

٢) تحديد نسبة الانتاج الخارجة عن المواصفات لاسباب غير عادية فى حالة وجود اختلاف بين المواصفات والحدود الطبيعية للانتاج.

الحل

١) الحد الاعلى للمواصفات = ٣٤,٢٥ + ٢,٢٠ = ٣٦,٤٥

الحد الادنى للمواصفات = ٣٤,٢٥ − ٢,٢٠ = ٣٢,٠٥

وحيث أن الحدود الطبيعية للانتاج تتضمن ٩٩.٧٣٪ من الانتاج لذلك فأنها تحسب كما يلى : $\mu \pm 3\sigma$:

وحيث أن μ غير معروفة فانها تقدر بمتوسط المتوسطات ($\bar{\bar{س}}$) وهو تقدير غير متحيز للمتوسطات μ. كذلك فان σ غير المعلومة تقدر بـ ($\frac{\bar{ى}}{د٢}$) وبافتراض تساوى القيم الحقيقية لكل من μ ، σ مع التقديرات غير المتحيزة $\bar{\bar{س}}$ ، ($\frac{\bar{ى}}{د٢}$) فان

الحد الاعلى الطبيعى للانتاج = $\bar{\bar{س}}$ + ٣ ($\frac{\bar{ى}}{د٢}$)

= ٣٣.٢٥ + ٣ ($\frac{٦,٢٠}{٢,٣٢٦}$)

= ٣٣.٢٥ + ٣ (٢,٦٦٥)

= ٣٣.٢٥ + ٧.٩٩٥ = ٤١.٢٤٥

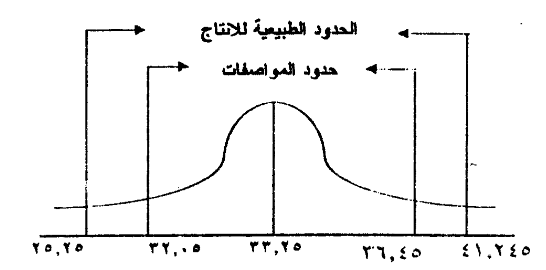
الحد الدنى الطبيعى للانتاج = $\bar{\bar{س}}$ - ٣ ($\frac{ى}{ح٢}$)

= ٣٣,٢٥ - ٣ ($\frac{٦,٢٠}{٢,٣٢٦}$)

= ٣٣,٢٥ - ٣ (٢,٦٦٥)

= ٣٣,٢٥ - ٧,٩٩٥ = ٢٥,٢٥

ويوضح الشكل التالى حدود المواصفات والحدود الطبيعية للانتاج



ويتضح من الرسم السابق أن الحدود الطبيعية للانتاج تقع خارج حدود المواصفات الموضوعة. لذلك فان الامر كما سبق أن ذكرنا يستدعى تغيير العملية الانتاجية أو تعديل المواصفات الموضوعة للانتاج أو اعادة تقدير كل من μ ، σ.

٢) تتحدد النسبة من الانتاج الخارجة عن المواصفات لاسباب غير عادية كما يلى :

- المساحة المحصورة بين الحدود الطبيعية للانتاج هى ٠,٩٩٧٣.

- لايجاد المساحة المحصورة بين حدود المواصفات توجد الدرجة المعيارية المقابلة لـ ٣٦,٤٥، الدرجة المعيارية المقابلة لـ ٣٢,٠٥ كما يلى:

الدرجة المعيارية المقابلة لـ ٣٦,٤٥ = $\frac{٣٣,٢٥-٣٦,٤٥}{٢,٦٦٥}$ = $\frac{٣,٢٠}{٢,٦٦٥}$ = ١,٢

الدرجة المعيارية المقابلة لـ ٣٢,٠٥ = $\frac{٣٣,٢٥-٣٢,٠٥}{٢,٦٦٥}$ = $\frac{١,٢-}{٢,٦٦٥}$ = -٠,٤٥

المساحة المقابلة لـ ١,٢ هى ٠,٣٨٤٩٣، المساحة المقابلة لـ ٠,٤٥ هى ٠,١٧٣٦٤

وبذلك فان مجموع المساحتين = ٠,٣٨٤٩٣ + ٠,١٧٣٦٤ = ٠,٥٥٨٥٧

وعلى ذلك فأن النسبة من الانتاج الخراجة عن المواصفات هى :

٠,٩٩٧٣٠ - ٠,٥٥٨٥٧ = ٠,٤٣٨٧٣ أو ٤٣,٨٧٪ من الانتاج الكلى.

جدول ثوابت خرائط مراقبة الجودة

عدد المفردات في العينة	حركة المتوسط			خرائط الانحراف المعياري					خرائط المدى				
	معاملات حدى المراقبة			معامل الخط الأوسط	معاملات حدى المراقبة				معامل الخط الأوسط	معاملات حدى المراقبة			
(ن)	أ	أ١	أ٢	حـ٢	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	ء٢	د١	د٢	د٣	د٤
٢	٢.٠٢٠	٣.٧٦٠	١,٨٨٠	٠.٥٦٤٢	صفر	٠.٨٤٣	صفر	٣,٢٦٧	٠,١٢٨	صفر	٣,٦٨٦	صفر	٣,٢٦٧
٣	٠.٧٣٢	٢.٣٩٤	١.٠٢٣	٠,٧٢٣٦	صفر	٠.٨٥٨	صفر	٢,٥٦٨	٠,٦٩٣	صفر	٤.٣٥٨	صفر	٢,٥٧٥
٤	٠.٥٠٠	٠.٨٨٠	٠.٧٢٩	٠.٧٩٧٩	صفر	٠.٨٠٨	صفر	٢.٢١٦	٢,٠٥٩	صفر	٤.٦٠٨	صفر	٢,٢٨٢
٥	٠.٣٤٢	٠.٥٩٦	٠.٥٧٧	٠.٨٤٠٧	صفر	٠.٧٥٦	صفر	٢.٠٨٩	٢.٣٢٦	صفر	٤.٩١٨	صفر	٢.١١٥
٦	٠.٢٢٥	٠.٤٠٠	٠.٤٨٣	٠.٨٦٨٦	٠.٠٢٦	٠.٧٠٠	٠.٠٣٠	٠.٩٧٠	٢.٥٣٤	صفر	٥.٠٨٧	صفر	٢.٠٠٤
٧	١.٠٣٤	٠.٢٧٧	٠.٤٠٩	٠.٨٨٨٢	٠.١٠٥	٠.٦٧٢	٠.٠٠٨	١.٨٨٢	٢,٧٠٤	٠.٢٠٥	٥.٣٠٣	٠.٠٧٦	١.٩٣٤
٨	٠.٠٦٠	٠.٠٧٥	٠.٣٧٢	٠.٩٠٧٢	٠.٠٦٧	٠.٦٣٨	٠.٨٠٥	٠.٨١٥	٢,٨٤٧	٠.٣٨٧	٥,٣٠٨	٠.٣٦	١.٨٦٤
٩	٠.٠٠٠	٠.٠٩٤	٠.٣٣٧	٠.٩٠٣٩	٠.٢٠٩	٠.٦٠٩	٠.٢٢٩	٠.٧٦٠	٢.٩٧٠	٠.٥٤٦	٥,٣٩٤	٠,٨٤	١,٨١٦
١٠	٠,٩٤٩	٠.٠٢٨	٠.٣٠٨	٠,٩٢٢٧	٠.٢٠٢	٠.٥٨٤	٠.٢٨٤	٠.٠٧٦	٣.٠٧٨	٠.٦٨٧	٥.٤٦٩	٠.٢٢٣	١.٧٧٧

الباب الثالث

الإحصاء الديموجرافى (السكاني)

مقدمة :

إن كلمة " ديموجرافى " تطلق على الذي يقوم بجمع البيانات عن السكان ويقوم بدراستها – ويتابع تغيرات البشر . كما إن كلمة " ديموجرافيا " هي كلمة يونانية الأصل يعنى الدراسة الإحصائية السكانية .

- **تعريف الديموجرافيا :** هي العلم الذي يتناول بالدراسة والبحث من حيث الحجم ، الانتشار ، الخصائص ويقوم هذا العلم على دراسة عوامل التغير وأسبابها ، وآثارها ، ونتائجها .

- ويعرف علم الإحصاء السكاني لدراسة عدد السكان وتركيبهم وخصائصهم من حيث المواليد والخصوبة والوفيات والهجرة والنمو وغيرها من الخصائص السكانية ويرتبط علم الإحصاء السكاني بعلم السكان ارتباطا وثيقا .

وتنقسم الإحصاءات السكانية إلى الأقسام الثلاثة التالية :

١- **إحصاءات اجتماعية** : وهى عبارة عن الإحصاءات التي تتعلق بالناحية الاجتماعية مثل المهنة والدخل والثقافة والنشاط الإجتماعى ومستوى المعيشة وغيرها .

٢- **إحصاءات اقتصادية :** وهى عبارة عن الإحصاءات التي تتعلق بالإنتاج الزراعي والصناعي ونظم الاستهلاك والتجارة الداخلية والخارجية .

٣- **إحصاءات حيوية :** وهى عبارة عن الإحصاءات التي تتعلق بدراسة المواليد والوفيات والزواج والطلاق وكيفية إجراءات التعدادات السكانية بهدف جمع المعلومات التي تساعد الحكومات على رسم سياساتها والقيام بواجباتها ورسم خطط التنمية الاقتصادية والاجتماعية .

- ويجد المؤلف ضرورة دراسة هذا الباب في هذه المرحلة الدراسية ليؤكد للقارىء أهمية العامل البشرى في المجتمع وهو المسئول عن كافة أمور الحياة .

وسوف يراعي المؤلف السهولة في عرض الموضوع من حيث الصياغة واختصاره وتسلسله تسلسل منطقي مفيد وسوف يتناول هذا الباب

في الموضوعات التالية :

الفصل الأول : أهم المصطلحات السكانية .

الفصل الثاني : مصادر البيانات والمعلومات السكانية .

الفصل الثالث : المعدلات التي يمكن حسابها من الإحصاءات السكانية .

الفصل الرابع : طرق تقدير السكان

الفصل الأول

أولا : بعض المصطلحات السكانية .

١-١ الإحصاءات الحيوية :

الإحصاءات الحيوية هي تلك الإحصاءات الخاصة بالأحداث الهامة في حياة الإنسان من حيث أنه كائن حي منذ ولادته إلى وفاته وبذلك فهي تبحث في حالة السكان وتكوينهم من حيث الزيادة والنقصان والأحداث الحيوية الهامة التي تقع لهم وهذا يشمل تعدادات السكان وإحصاءات المواليد والوفيات وإحصاءات الهجرة بنوعيها الداخلية والخارجية وكذا إحصاءات الأمراض التي تصيب الإنسان .

١-٢ عدد السكان :

هو عدد جميع الأشخاص الأحياء الموجودين على قيد الحياة داخل حدود بلد معين في لحظة العد بصرف النظر عن جنسيتهم .

وقد بلغ عدد سكان مصر ٦١,٤٥ مليون نسمة في ١٩٩٦ .

١-٣ كثافة السكان :

هي خارج قسمة عدد السكان في البلد على مساحة هذا البلد بالكيلومتر "أو الميل المربع".

وفى تعداد ١٩٩٦ بلغت كثافة السكان في مصر ٥٩فرد/كم بينما بلغت هذة الكثافة في القاهرة ٣١٦٩٧ فرد/كم.

ويلاحظ أن هذا المقياس لا يكون مفضلا إذا استخدم لمقارنة درجة الازدحام في بلدين أحداهما ذات مساحات كبيرة من البحيرات و الجبال والصحارى والأخرى ارض خصبة ومسكونة.

وفى مصر حيث يعيش السكان على ٤% من المساحة الكلية لدلت على عدم الازدحام في حين أن العكس هو الصحيح إذا حسبت على أساس المساحة المسكونة فعلا بعد استبعاد الصحارى من المساحة الكلية .

١-٤: درجة الازدحام

أحيانا يطلق عليها متوسط عدد الأفراد بالغرفة وهو النسبة بين عدد السكان وعدد الغرف في بلدا ما وفي تعداد ١٩٩٦ بلغت النسبة في مصر ١,٣ فرد لكل غرفة

١-٥: متوسط حجم الأسرة :

وهو خارج قسمة عدد أفراد الأسر على عدد الأسر وفي تعداد ١٩٩٦ بلغت في مصر ٤,٦ .

١-٦: نسبة الإعالة:

وهو خارج قسمة السكان الذين لا يعملون على عدد السكان من الذين العاملين =

$$\frac{\text{إجمالي السكان} - \text{من يعملون}}{\text{من يعملون}}$$

وبلغت هذه النسبة في مصر في تعداد عام ١٩٩٦ =

$$\frac{\text{٦١,٤٥ مليون} - \text{١٧,٨ مليون}}{\text{١٧,٨ مليون}} = \text{٢,٤٥ مليون}$$

بينما بلغت نفس النسبة في تعداد ١٩٨٦ .

١-٧ نسبة تغير السكان :

هو نسبة عدد السكان في تعداد معين ك ن إلى عدد السكان في تعداد سابق ك. لنفس البلد

وبكلام أخر :

$$\text{نسبة تغير السكان} = \frac{ك_ن}{ك_٠} = \times ١٠٠$$

فإذا علمنا أن تعداد السكان في مصر لعام ١٩٨٦ بلغ ٤٨,٣ مليون نسمة

فان نسبة تغير السكان بين تعداد ١٩٨٦ ، ١٩٩٦ =

$$١٠٠ - \frac{٦١,٤٥}{٤٨,٣} \times ١٠٠ = ٢٧\%$$

ويستخدم قسم الدراسات السكانية بالأمم المتحدة في كتابتها المعادلة التالية

لحساب المعدل السنوي لنمو السكان بين التعداديين

$$\text{معدل نمو السكان} = \sqrt[ن]{\frac{ك_ن}{ك_٠}} \times ١٠٠$$

حيث ان ك. هى عدد السكان في بداية الفترة و ك ن هي عدد السكان في نهاية الفترة و (ن) هي عدد السنوات خلال الفترة وبتطبيق هذه المعادلة على مصر بين تعدادي ١٩٨٦ ، ١٩٩٦ نجد أن معدل نمو السكان سنويا ٢١% .

١-٨ الزيادة الطبيعية للسكان :

وهى الفرق بين عدد المواليد وعدد الوفيات في السنة لأي بلد .

الفصل الثاني

مصادر البيانات والمعلومات السكانية .

تنقسم هذه المصادر إلى نوعين :

- المصادر التقليدية وتشمل :

- التعداد العام للسكان .

- التسجيل الحيوي .

- عمليات المسح أو المعاينة .

تعداد السكان :

كان التعداد قديما يجرى بغرض التعرف على العدد الفعلي للأشخاص لجباية الضرائب ومعرفة القوة البشرية للحروب ولكن تغير الآن هذا المفهوم حتى أصبح في النظم الحديثة يستخدم لبحث الأحوال التعليمية والاقتصادية والسياسية ومعرفة التوزيع الجغرافي للسكان ، وحديثا أصبح عد دوري للسكان بطرق مختلفة ولم تعد قاصرة على الوفيات فقط بل أصبحت البيانات محل اهتمام قطاعات الدولة المختلفة والأوساط العلمية ودوائر المعرفة ...... الخ .

وتوجد عدة طرق لإجراء التعداد السكاني منها :

الطريقة الأولى : التعداد الفعلي

يقصد بالتعداد الفعلي حصر السكان ، كما هم في الواقع وقت التعداد ، ففي كل مكان يتم عد كل الأشخاص الموجودين فيه ساعة التعداد بصرف النظر عن كونهم من سكان المكان أصلاً أو ضيوفا عليه أو زائرين له وقت التعداد ، يعنى ذلك تسجيل جميع الأشخاص من نفس المكان أو غرباء موجودين بصفة مؤقتة أو دائمة .

وتتميز هذه الطريقة بالسهولة في التطبيق وقلة الأخطاء عند إجراء عملية العد حيث تقتصر مهمة العدادون على عد جميع الأشخاص المتواجدين في المكان ساعة التعداد إلا أن هذه الطريقة يعاب عليها أنها لا تصور الأشياء على حقيقتها وتعطي معلومات غير صحيحة أي أنها تعطي صورة للسكان في المناطق الجغرافية المختلفة على غير حقيقتها ينتج عن ذلك أن المقاييس والمؤشرات والنسب المحسوبة من هذه البيانات تكون غير معبرة بدقة عن هذه المناطق مما يؤدي إلى خطأ السياسات المعتمدة عليها ، كما أن هذه الطريقة غير ملائمة للمناطق التي يتصف سكانها بالتحركات والتنقلات المستمرة حيث يسقط المسافرون غالبا من عملية التعداد وأيضا في المساحات الواسعة التي لايتم فيها التعداد في يوم واحد حيث أن حركة السكان تؤثر على التعداد ويمكن عد الشخص الواحد أكثر من مرة .

الطريقة الثانية : التعداد النظري :

طبقا لهذه الطريقة يتم حصر الأشخاص حسب محال إقامتهم المعتادة يعني ذلك أن الأشخاص الزائرين لا يعدون مع أهالي المنطقة المتواجدين فيها ، و الأشخاص الغائبين عن محل أقامتهم لأي سبب وقت إجراء التعداد يعدون بالحصول على بياناتهم من ذويهم .

وتعطي هذة الطريقة صورة صادقة وبيانات فعلية عن السكان حسب توزيعهم الجغرافي الحقيقي مما يؤدي إلى مؤشرات حقيقية تساعد في رسم السياسات الصحيحة وهذه الطريقه وأن كانت تعطي بيانات صحيحة ألا أنها تستوجب تعريف محل الإقامة الحقيقي لكل شخص خاصة إذا كان للشخص أكثر من محل أقامة وكذلك الحال بالنسبة للشخص الذي ليس له محل أقامة كأن يكون من البدو الرحل أو من سكان المناطق النائية الأمر الذي يترتب

عليه أخطاء في عملية الحصر ، كما أن الحصول على بيانات الأشخاص الغائبين قد يتم بطريقه غير دقيقه وتكون البيانات غير صحيحة و لايمكن التحقق منها ، كما يحتاج التعداد النظري إلى جهاز إحصاء قوى ومنظم وتعتمد دقة الطريقة إلى حد كبير على وعى الأشخاص وثقافتهم .

الطريقة الثالثة : الطريقة المشتركة :

تعتمد هذه الطريقة على الجمع بين التعداد الفعلي والتعداد النظري حيث تحتوى استمارة التعداد طبقا لهذه الطريقة على ثلاثة أنواع من البيانات .

النوع الأول : بيانات عن جميع الأشخاص الموجودين في المكان أثناء إجراء عملية التعداد سواء كانوا من سكان المكان أو غرباء عنه (الأساس الفعلي)

النوع الثاني : بيانات عن الأشخاص الغائبين مؤقتا عن المكان .

النوع الثالث : بيانات عن الأشخاص الغرباء الموجودين مؤقتا في المكان والذين سبق قيدهم ضمن بيانات النوع الأول وتجمع هذه الطريقة بين أسلوبي التعداد حيث أن بيانات النوع الأول تعبر عن البيانات الناتجة من الطريقة الفعلية أما الطريقة النظرية فيمكن الحصول على بياناتها بإضافة بيانات النوع الثاني إلى النوع الأول واستبعاد بيانات النوع الثالث منهم .

ويلاحظ إن البيانات التي يتم الحصول عليها من الطرق الثلاثة غير متطابقة فضلا عن مزايا وعيوب كل طريقه ، لذا يمكن القول أنه لا يوجد أسلوب كامل وصحيح يمكن استخدامه في الحصول على عدد السكان ، عموما فإن بعض الدول تتبع الأسلوب النظري مثل الولايات المتحدة وكندا والبعض الأخر يتبع الأساس الفعلي كما في انجلترا ومصر والبعض الأخر يتبع الطريقة المشتركة كل حسب ظروفها وطبيعة توزيع السكان بها والطبيعة الجغرافية ودرجة وعى السكان .

أما عن طرق الحصول على البيانات فيمكن القول أن هناك طريقتين رئيسيتين للحصول على البيانات :

الأولى : أن يتولى العدادون أنفسهم تدوين ما يدلى به رب الأسرة من إجابات في الاستمارة المعدة مسبقا لذلك وهذه الطريقة تعتبر المناسبة خاصة في حالة غير المتعلمين وأيضا حالة عدم الوعي والفهم الكامل للأسئلة الموجودة في استمارة التعداد حيث يقوم العدادون بتوضيحها لهم .

الثانية : أن يتولى أرباب الأسر أنفسهم تدوين الإجابات بأنفسهم في الاستمارة وتعتبر هذه الطريقة مناسبة في حالة المجتمعات المتقدمة والتي تتصف بالوعي والفهم الكامل لأهمية البيانات والتي يكون فيها مستوى التعليم مرتفعا وان كانت الأسئلة في هذه الحالة يجب أن تتسم بالوضوح الكامل .

وعادة يتم اختيار موعد التعداد بحيث تقل فيه بقدر الامكان حركة السكان إلى أقل ما يمكن بأن يتم اختيار موعدا بعيدا عن مواعيد الأعياد والمناسبات الدينية والسياحة والمواسم الزراعية وغيرها وتحدد غالبا ساعة التعداد في منتصف الليل حيث يكون الناس في منازلهم عدا القليل وتعتبر بيانات التعدادات سريه لايمكن إفشاء شيئا منها أو استعمالها في غير أغراضها الاحصائية هذا من ناحية ومن ناحية أخرى فان هناك من القوانين ما يلزم الأشخاص بإعطاء البيانات المطلوبة منهم في استمارة التعداد وتفرض عقوبات على من يرفض إعطاء البيانات الصحيحة .

مراحل جمع بيانات التعداد :

١- **المرحلة الإعدادية** : وهى مرحلة وضع الخطة العامة والأعداد لإجراء التعداد .

٢- **المرحلة الميدانية** : وهى مرحلة جمع البيانات .

٣- **المرحلة التجهيزية** : وهى المرحلة التي يتم فيها تصنيف البيانات وعرضها في الجداول والرسوم البيانية لنشرها .

٤- **المرحلة التحليلية** : تقييم نتائج العمل في المراحل الثلاثة السابقة وقد تتعداها إلى عملية تحليل النتائج وأعداد البحوث على أساسها .

أ- **المرحلة الإعدادية** : تشمل خطوات هذه المرحلة :

١- تحديد وقت التعداد بحيث لا يكون متأثرا باى ظروف معاكسة أو تتغير فيها حركة السكان .

٢- الاتفاق على ما إذا كانت وحدة العد هي الفرد أو الأسرة وتسمى الاستمارة في الحالة الأولى استمارة فردية أما في الحالة الثانية فتسمى استمارة عائلية .

٣- تصميم استمارة التعداد وصياغة الأسئلة وتحديد طريقة جمع البيانات .

٤- استطلاع رغبات الجهات التي تستخدم بيانات التعداد تمهيدا لإضافة

بعض الأسئلة أو حذف بعضها الاخر أو تعديله .

٥- الاسترشاد بالخبرة المكتسبة من التعدادات السابقة وذلك بدراسة التقارير التي يكون قد كتبها المسئولون على مراحل التعدادات السابقة .

٦- بعد تصميم الاستمارة وقبل طرحها نهائيا لتعميمها يجب تجربة الاستمارة على مجموعة من المهتمين بالمسائل العامة أو المسئولين عن القطاعات المختلفة حكومية أو غير حكومية أو على عينة إحصائية مختارة من بين الجمهور أو على قرية أو مدينة مختارة ثم تفحص الإجابات الواردة على أسئلة الاستمارة التجريبية للاطمئنان على صلاحية الأسئلة وسلامة صياغتها وللاطمئنان على جودة تصميم الاستمارة على وجه العموم .

٧- عمل الخرائط وأعداد قوائم المساكن بما يكفل حصر كل السكان في كل المناطق ويراعى في تحديدها ألا تتداخل هذه المناطق مع بعضها ولا تسقط إحداها .

٨- الاتفاق على الميزانية المالية والفترة الزمنية والقوى البشرية بما يضمن عدم التعثر في الطريق .

٩- تحديد الأجهزة التي يمكن الاستعانة بموظفيها بطريق التدريب في جميع البيانات كعدادين ومشرفين ورسم البرامج اللازمة لتدريبهم.

١٠- إجراء تعداد الإسكان وتعداد للمنشآت في نفس وقت التعداد .

٢- المرحلة الميدانية :

يقوم موظف التعداد بزيارة ميدانية للمنطقة والمساكن التي تقع في اختصاصه قبل التعداد لمعرفة ما يستجد على العائلة من أفراد

(مواليد – ضيوف - ....الخ) أو ما قد ينقص (وفيات – غياب - .... الخ) ويتم ترتيب العمل في شكل هرمي وتحديد مهام كل وظيفة لكل مشتغل في التعداد بهدف الدقة في جميع البيانات وسلامة العد وكفاءة الأشراف والتفتيش .... الخ .

٣- المراحل التجهيزية :

بعد الحصول على الإجابات من العائلات أو الأفراد يتم فحص كل استمارة بواسطة العدادون وتصحيحها من الأخطاء في كل منطقة قبل إرسالها المركز الرئيسي (الجهاز المركزي للتعبئة العامة والإحصاء) ثم يقوم المركز بمراجعتها للتحقق من كل إجابة أمام سؤالها ولا تتناقض مع الأخرى على نفس الاستمارة ويتم إدخالها إلى الحاسب الآلي حيث تظهر النتائج في شكل جداول تلخيصيه ولكنها تحتاج بعد ذلك لعرضها جدوليا وبيانيا للعامة وراسمي الخطط والسياسات المستقبلة .

٤- المرحلة التحليلية:

وهي مرحلة تقييم كل المراحل السابقة والاطمئنان إلى جودة النتائج وسلامتها وقد تشمل حساب المؤشرات التي يمكن في ضوئها الاستدلال على مدى صحة النتائج ، وتحتاج هذه المرحلة إلى خبرات الإداريين والاحصائين وعادة يجرى التعداد بصفة دورية كل عدد من السنوات (١٠) سنوات بغرض تغير التشريعات والأحوال الاقتصادية والاجتماعية والصحية اعتمادا على بيانات التعداد. معرفة توزيع السكان حسب الخواص المختلفة كالعمر والحالة التعليمية والزواجية وتوزيعهم الجغرافي .

ويستفاد من التعداد في الدراسات بوصف الناس وأحوالهم وظروفهم وخصائصهم في لحظه معنية من الزمن بينما الإحصاءات الحيوية تلتقط للناس صورا متحركة عن تصرفاتهم الديموجرافيه على مدار فترة زمنيه لها بدايتها ونهايتها .

الأخطاء التي تتعرض لها الإحصاءات الديموجرافية

١.أخطاء الحصر :الديموجرافي:

فقد يسقط بعض الأفراد أو العائلات من الحصر أما لاختلاف أساس إجراء التعداد أو لأنهم يسكنون في مناطق نائية أو لضآلة عددهم في قرية معينه.

٢. أخطاء الإجابة والتسجيل :

وهى صادرة أما من العدادون أو الإباء الذين يتولون استيفاء الاستمارات عفوا أو عمدا أو أيضا يحدث خطا في أسباب الوفاة. وما زالت بعض الدول تعانى من بعض النقائص في إحصاءات الوفيات خاصة الدول النامية .

٣.أخطاء جمع البيانات:

يمكن أن تحتوى البيانات على أخطاء في الحصر أو الاجابه والتسجيل أو عدم وضوح التعليمات وعدم الحزم في تنفيذها أو بسبب الإهمال في تصميم الاستمارة أو عدم الدقة في صياغة الاسئله أو في مرحله الفرز الآلي وذلك بسبب أخطاء متوالية في مراحل التعدد.

٤.التعداد القومي :

– اعتادت بعض الدول الاحتفاظ بسجلات عن سكانها بصفه دائمة وذلك لأغراض إدارية بحته وهو جمع المعلومات الكاملة عن فرد بصفته عضو في العائلة وميزة هذه السجلات أنها تسمح بمعرفه

للمعلومات عن السكان تماما كما لو كان نظام التعدادات موجود ولكن تجرى التعدادات أيضا للتأكد من صحة هذه السجلات والتأكيد على :

١.التحقق من شخصيه الفرد.

٢.الاستدعاء للخدمة العسكرية.

٣.الأشخاص الذين لهم حق الانتخابات.

٤.التقدير للسكان مستقبلا.

٥.معرفه حجم الهجرة الداخلية والهجرة الخارجية.

٦.كإطار لاستخراج العينات.

٧.لإجراء بعض الدراسات الخاصة.

عيوبها :

١.الاحتفاظ بالسجلات أمر باهظ التكاليف.

٢.لا تعطى في بعض الأحول بيانات يعتمد عليها .

٣. لا يمكن الاعتماد على ما بها من بيانات إذا لم تتخذ إجراءات وضوابط كافيه لإحكام التسجيل.

الوحدة التي يتم على أساسها جمع الإحصاءات الديموجرافيه :

أحيانا يستخدم في استمارة جمع البيانات (الفرد) كوحدة للمشاهدة أو التمسبين أو (العائلة) و[illegible] يتم جمع بيانات هذه الوحدات الديموجرافيه أما بطريقه الحصر الشامل أو بطريقه العينة .

الفصل الثالث

المعدلات التي يمكن حسابها من الإحصاءات السكانية

المعدلات التي يمكن الحصول عليها من البيانات الحيوية وتعداد السكان

وهي :-

١- معدل المواليد الخام:

يوضح هذا المعدل عدد المواليد الأحياء لكل عدد ١٠٠٠من السكان في منطقه معينه أو دوله معينه في سنه معينه ، لعل سبب الاعتماد على أعداد المواليد أحياء فقط هو أن ظاهرة النمو السكاني لا تتأثر بالمواليد موتى ويمكن حساب معدل المواليد الخام كما يلي:

$$\text{معدل المواليد الخام} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء في سنه معينة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

ولاحظ أتفاق البسط والمقام في المكان الذي يحسب فيه المعدل ونظرا لأنه قد تحدث تذبذبات في أعداد المواليد الأحياء من سنه لأخرى فقد يؤخذ متوسط عدد المواليد إحياء في عدة سنوات وكذلك بالنسبة

لإعـداد السـكان فيمكن أن يؤخذ متوسط عدد السكان في عدة سنوات وذلك بغرض الوصول إلى قيم دقيقه لمعدل المواليد الخام

٢. معدل الخصوبة العام :

المعروف أن صفة الإنجاب بالسيدات فقط دون الرجال وأيضا خلال سن الحمل (غالبا من سن ١٥ إلى ٤٩سنه)، لذا فان استبدال عدد الإناث في سن الحمل في منتصف السنة بدلا من عدد السكان في منتصف السنة في معدل الخام فأننا نحصل على معدل الخصوبة العام.

$$\text{معدل الخصوبة العام} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء خلال سنة معينه}}{\text{عدد الإناث في سن الحمل في منتصف نفس السنة}} \times ١٠٠٠$$

وحيث أن أعداد المواليد أحياء يمكن الوصول إليها سنوياً من إحصاءات المواليد فهي أرقام حقيقة أمـا المقام في المعدلات السابقة فسواء كان عدد السكان في منتصف السنة أو عدد الإناث في سن الحمـل فـي منتصف السنة فأن هذه الأعداد تكون حقيقة في سنين التعداد فقط أما باقي السنوات فأنهـا تكون أعدادا تقديريه يتم الحصول عليها باستخدام أساليب التقدير باستخدام الصيغة العددية أو الهندسيه أو الأسيه،إذا فان البسط يكون عبارة عن أعداد حقيقة للمواليد الأحياء أما المقام فيمكن أن يكون أعداد تقديريه فمثلا:

عدد المواليد أحياء خلال سنه معينه

معدل المواليد الخام = ------------------------------ × ١٠٠٠

تقدير عدد السكان في منتصف السنة

عدد المواليد أحياء خلال سنه معينه

ل الخصوبة العام = ------------------------------ ×١٠٠٠

تقدير عدد الإناث في سن الحمل في منتصف السنة

ويتضح على معدل الخصوبة انه يعطى العدد الذي تضيفه كل ١٠٠٠ أنثى في سن الحمل من المواليد الأحياء إلى عدد السكان في سنه معينه ويمكن أن يجرى تعديل على معدل الخصوبة وذلك بالقسمة على عدد الإناث المتزوجات فقط في سن الحمل في منتصف السنة .

٢- **معدل الخصوبة الخاص بفئة عمريه معينه :**

حيث أن عمليه الإنجاب بالنسبة الإناث في سن الحمل تختلف من عمر إلى آخر لذا فانه من العيوب التي تؤخذ على معدل الخصوبة العام انه يهمل احتمالات الإنجاب للأعمار المختلفة داخل فترة الحمل ، والمعروف أن الإناث في عمر من ٢٠ - ٣٠ سنه تكون قدرتهم على الإنجاب أعلى من الإناث في العمر من ٤٥-٥٠ مثلا ، لذا يمكن حساب معدلات خصوبة عمريه لكل فئة من الفئات التي يكون فيها سيدات في سن الحمل من ١٥ حتى ٥٠ سنه اى يتم حساب معدل الخصوبة الخاص بكل فئة (الفئات

قد يكون خماسية اى بكل منها خمس سنوات أو غير ذلك وأيضا قد تكون الفئات متساوية أو منتظمة اى أطوالها متساوية وقد تكون غير ذلك، ويراعى ذلك عند إجراء الحسابات) ويؤخذ معدل الخصوبة الخاص بفئة عمرية معينة بالصورة التالية :

معدل الخصوبة لفئة عمريه معينه =

$$\frac{\text{عدد المواليد أحياء من إناث في فئة عمريه معينه}}{\text{عدد الإناث في تلك الفئة العمريه فى منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

ويتطلب حساب هذه المعدلات توافر البيانات الخاصة بأعداد السيدات في كل فئة عمريه وكذلك أعداد المواليد الأحياء من السيدات في كل فئة عمريه بالنسبة لأعداد السيدات يتم الحصول عليها من بيانات التعدادات السكانية وبالتقدير للسنوات بين كل تعدادين أما أعداد المواليد الأحياء فيتم الحصول عليهم من الإحصاء الحيوية.

٤- معدل الخصوبة الكلية:

حيث أن فترة الحمل من سن(١٥-٤٩) يمكن تقسيمها إلى فئات خماسية وانه أمكن حساب معدل الخصوبة النوعي الخاص بكل فئة عمريه إذا تم ضرب هذه المعدلات في طول الفئة لكل منهم فإننا

نحصل على ما تسمى الخصوبة النوعية الكلية لكل الفئات ينتج لنا معدل الخصوبة الكلية ومن الممكن إيجاده طبقا للخطوات التالية:

أ- يتم حساب معدلات الخصوبة النوعية لكل فئة عمريه.

ب-يتم حساب معدلات الخصوبة النوعية الكلية لكل فئة عمريه = معدلات الخصوبة النوعية الكلية لكل فئة عمريه ×٥(طول الفئة).

ج- معدل الخصوبة الكلية = مجموع معدلات الخصوبة النوعية لكل الفئات العمريه.

أو = مجموع معدلات الخصوبة النوعية لكل فئة عمريه ×٥ وذلك إذا كانت أطوال الفئات متساوية.

هـ- معدل الوفاة الخام:

حيث أن الدول تهتم بتسجيل حالات الوفاة وتلزم الأشخاص بذلك خلال فترة معينه بالتالي يتوافر لديها أعداد الوفيات حسب التقسيمات المختلفة للعمر والجنس والمنطقة الجغرافية وأسباب الوفاة ....، وغالبا ما تكون الإحصاءات مفيدة في التعرف على المؤشرات السكانية والصحية الهامة ومنها معدل الوفاة الخام ويساوى ناتج قسمه عدد ما خلال سنه معينه على عدد السكان الفعلي أو التقديري في منتصف نفس السنة اى

عدد الوفيات خلال سنه معينه

معدل الوفاة الخام = ـــ × ١٠٠٠

معدلات الوفاة النوعية الخاصة بكل فئة عمريه معينه

إذا كانت البيانات الخاصة بكل فئة عمريه متوافرة وأمكن الحصول على أعداد الوفيات لكل فئة عمريه

(بـدأ مـن صـغر سنه حتى أخر عمر يصل إليه الإنسان وليكن طول كل فئة ٥ سنوات فانه يمكن

حساب معدل الوفاة لكل فئة عمريه حيث أن :

عدد الوفيات خلال فئة عمريه معينه خلال سنة

معدل الوفاة الخاص بكل فئة عمرية = ـــ ١٠٠٠×

عدد السكان في نفس العمريه في منتصف السنة

وأيضا يمكن حساب معدل الوفاة النوعي الكلي لكل فئة عمريه وذلك بالضرب

في طول الفئة يعنى معدل الوفاة الخاص بفئة معينه × (٥) طول الفئة.

معدل وفاة النوعي لكل فئة عمرية معينه = معدل الوفاة الخاص بفئة معينة × ٥

٧- **<u>معدل الوفاة الكلى</u>** = مجموع معدلات الوفاة النوعية الكلية لكل فعل

أو = مجموع معدلات الوفاة النوعية الخاصة بكل الفئات × طول الفئة

٨- معدلات وفيات أخرى:

توجـد بعـض معـدلات الوفيات الأخرى التي يمكن حسابها والتي يكون لها مدلولها وفائدتها الهامة نعرض منها :

أ-معدل وفيات الأطفال حديث الولادة - (عدد الوفيات من الأطفال التي تقل أعمارهم عن ٢٨ يوم في سنه معينه ÷ عدد الأطفال المولودين أحياء في نفس السنة) (×١٠٠٠)

ب- معـدل وفيات الأطفال الرضع-(عدد الوفيات من الأطفال التي تقل أعمارهم عن ٢٨ يوم في سنه معينه ÷عدد الأطفال المولودين أحياء في نفس السنن) (× ١٠٠٠)

ج- معـدل وفيات الامومه- (عدد الوفيات من الأمهات بسبب الحمل أو الوضع أو النفاس في سنه معينه ÷ عدد المواليد أحياء في نفس السنة) (× ١٠٠٠)

وتعكس هذه المعدلات مستوى الرعاية الصحية التي توليها الدولة للأطفال المولودين أو للأمهات أثناء فترة الحمل والولادة.

٩- معدلات التوليد أو التكاثر: المعروف أن الإناث هم المسئولون عن عمليه الولادة والتكاثر لذا يمكن التعرف على معدلات التوليد الثابته والتي تأخذ في اعتبارها عدد المعدلات من الإناث فقط.

أ- **معدل التوالد العام**

$$= \frac{\text{عدد المواليد أحياء من الإناث فقط في سنه معينه}}{\text{عدد السيدات في سن الحمل في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

عدد المواليد الإناث = معدل الخصوبة × العدد الكلى للمواليد من النوعين

وإذا كان عدد الإناث غير معروف تحديدا ولكن معروفا النسبة التقريبية للنوع فيتم الضرب في النسبة بين الإناث إلى نسبه المواليد من النوعين للوصول إلى معدل مولود ذكر فيمكن ضرب معدل الخصوبة

في $\frac{١١٠}{٢٣٠}$ للحصول على معدل التوالد .

ب- **معدل التوالد النوعي لكل فئة عمريه**

$$= \frac{\text{عدد المواليد الأحياء من الإناث فقط من سيدات من فئة عمريه معينه في سنه معينه}}{\text{عدد السيدات في نفس الفئة في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

عدد المواليد الإناث

= معدل الخصوبة النوعي لكل فئة عمريه × -------------------

عدد المواليد الكلى

ج- **معدل التوالد النوعي الكلى لكل فئة عمريه**

= معدل الخصوبة النوعي الكلى لكل فئة عمريه × طول الفئة (٥) .

د- معدل التوالد الكلى = مجموع معدلات التوالد النوعي الكلية لكل الفئات.

=مجموع معدلات التوالد النوعي الخاصة لكل الفئات × طول الفئة المتساوي (٥)

مثال(١)

يوضـــح الجـــدول الأتي توزيع الإناث اللاتي في سن الحمل حسب فئات الأعمار الخماسية وكذلك عدد المواليد المقابلة لكل فئة من هذه الفئات(بالألاف) وذلك في سنه من سنوات في أحدى الدول .

فئات عمر ألام	عدد المواليد	عدد الإناث في سن الحمل
١٥-	٤٦٥٥	٢٦٨٣٨٠
٢٠-	٣٦٠٧٧	٢٧٣٠٥٠
٢٥-	٣٥٦٣٠	٢٩٠٤٥٨
٣٠-	٢٢١٧٢	٢٣٠٢٨٢
٣٥-	٦٧١٢	٢٧٤٧٤٤
٤٠-	٩٧٦	٢٢٦٣٠٣
٤٥-٥٠	٣٤	٢٢٠٥٧٦

والمطلوب حساب:

١- معدل الخصوبة العام.

٢- معدلات الخصوبة العمريه لفئات العمر المختلفة.

٣- معدلات الخصوبة العمريه الكلية لهذه الفئات.

٤- معدل الخصوبة الكلية خلال فترة الحمل.

الحـــــــل

فئات عمر الأم	عدد المواليد	عدد الإناث في سن الحمل	معدلات الخصوبة العمريه	معدلات الخصوبة العمريه الكلية الخماسية
-١٥	٤٦٥٥	٢٦٨٣٨٠	١٧و٣٤	٨٦ ،٧٠
-٢٠	٣٦٠٧٧	٢٧٣٠٥٠	٩٥ ، ٥٠	٤٧٧ ،٥٠
-٢٥	٣٥٦٣٠	٢٩٠٤٥٨	١٢٢ ،٦٧	٦١٣ ،٣٥
-٣٠	٢٢١٧٢	٢٣٠٢٨٢	٦٧ ،١٣	٣٣٥ ،٦٥
-٣٥	٦٧١٢	٢٧٤٧٤٤	٤٣ ،٢٤	١٢٢ ،١٥
-٤٠	٩٧٥	٢٢٦٣٠٣	٤ ، ٣١	٢١ ،٥٥
٤٥-٥٠	٣٤	٢٣٠٥٧٦	١٥و ٠	٠ ،٧٥

٩٦٢٥٥

١- معدل الخصوبة العام = ------------------- × ١٠٠٠ = ٥١,٠٩

١٨٨٣٧٩٣

أي أن عدد المواليد التي تحدث خلال ٠٠٠ لكل ألف امرأة في سن الحمل يساوى ٥١ مولود

٢- معدلات الخصوبة العمرية الخاصة تظهر في العمود الرابع بالجدول .

- معدلات الخصوبة الكلية العمرية الخماسية تظهر في العمود الخامس بالجدول

٤- معدل الخصوبة الكلية خلال فترة الحمل نحصل عليها إما :

أ- بجمع العمود الخامس = ١٦٥٧,٦٥

ب- بضرب مجموع معدلات الخصوبة العمرية الخاصة

(مجموع العمود الرابع × ٥) =٣١٢,٥٣ × ٥ = ١٦٥٧,٦٥

ومعنى أن كل ألف امرأة في هذه الدولة إذا عاشت إلى فترة نهاية العمل

وهى (سن الستين) سيولد لهن عدد من المواليد يساوى ١٦٥٧ مولود

أو بعبارة أخرى يمكن القول أن كل أنثى سوف تنجب تقريباً ١,٦مولود حياً

وذلك بافتراض أنها سوف تبقى على قيد الحياة طول فترة الحمل .

مثال (٢)

البيانات التالية مستخرجة من سجلات مدينتين أ ، ب في إحدى السنوات

(بالآلاف) :-

بيان	عدد السكان في منتصف السنة	عدد الوفيات	عدد وفيات الأطفال	عدد المواليد أحياء	عدد وفيات الأطفال حديثي الولادة
مدينة (أ)	٥٨٠٠٨	٥٩٠	١٤٠	١٥٠١	٢٤
مدينة (ب)	٦٩١٧٢	٦٥٥	١٢٣	١٦١٢	٣٦

المطلوب حساب المعدلات التالية لكلا من المدينتين ثم المقارنة بينهما :

١- معدل وفيات الأطفال الرضع .

٢- معدل الوفيات الخام .

٣- معدل وفاة الأطفال حديثي الولادة .

٤- معدل المواليد الخام .

٥- معدل الزيادة الطبيعية .

الحـــــل

$$\text{معدل وفيات الأطفال الرضع} = \frac{\text{عدد وفيات الأطفال الرضع}}{\text{عدد الأطفال المولدين أحياء}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{مدينة أ} = \frac{١٤٠}{١٥٠١} \times ١٠٠٠ = ٩٣,٢٧ \text{ في الألف .}$$

$$\text{مدينة ب} = \frac{١٢٣}{١٦١٢} \times ١٠٠٠ = ٧٦,٣ \text{ في الألف .}$$

نلاحظ انخفاض معدل الوفيات في المدينة (ب) عنه في المدينة (أ) .

٢- معدل وفيات الخام في المدينة أ =

$$\frac{٥٩٠}{٥٨٠٠٨} \times ١٠٠٠ = ١٠,١٧ \text{ في الألف}$$

نلاحظ انخفاض معدل الوفيات في المدينة ب عنة في المدينة أ

٣- معدل وفيات الأطفال حديثي الولادة =

$$\frac{\text{عدد الأطفال حديثي الولادة}}{\text{عدد الأطفال المولودين أحياء}} \times ١٠٠٠$$

في المدينة (أ) = $\frac{٢٤}{١٥٠١}$ × ١٠٠٠ = ١٥,٩٩ في الألف .

في المدينة (ب) = $\frac{٣٦}{١٦١٢}$ × ١٠٠٠ = ٢٢,٣٣ في الألف

ويعنى ذلك انخفاض معدل الوفيات للأطفال حديثي الولادة في المدينة (أ) عنه في المدينة (ب)

عدد المواليد أحياء خلال سنة

٤- معدل المواليد الخام = ------------------------------- × ١٠٠٠

عدد السكان في منتصف السنة

١٥٠١

في المدينة (أ) = ---------------------------- × ١٠٠٠ = ٢٥,٨٧ في الألف

٥٨٠٠٨

١٦١٢

في المدينة (ب) = ---------------------------- ×١٠٠٠ = ٢٣,٣ في الألف .

٦٩١٧٢

ويعنى ذلك زيادة معدل المواليد في المدينة (أ) أكبر منه في المدينة (ب)

٥- معدل الزيادة الطبيعية في السكان = معدل المواليد الخام - معدل الوفيات الخام .

مدينة أ- (٢٥,٨٧- ١٠,١٧) = ١٥,٧ في الألف

مدينة ب- (٢٣,٣-٩,٤٧) = ١٣,٨٣ في الألف

هذا يعنى أن السكان في المدينة أ يتزايدون بمعدل اكبر من تزايد المدينة ب .

مثال (٣)

يوضح الجدول التالي توزيع الإناث في سن الحمل

(بالآلاف المقابلة لكل فئة عمريه وذلك في عام ١٩٦٠)

فئات العمر	١٥-	٢٠-	٢٥	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-٥٠	المجموع
عدد الإناث	٨٩٠	٧٥٠	٨٣٠	١١٠٠	١٢٠٠	٩٥٠	٦٥٠	٦٤٦٠
عددا لمواليد	٢٠٠	٢٥٠	١٨٠	٢٩٠	١٢٠	٣٠	٥	١٠٧٥

والمطلوب : إيجاد المعدلات التالية :

١- معدل الخصوبة العام .

٢- معدل الخصوبة العمريه وكذلك معدلات الخصوبة العمريه الكلية .

٤- معدل الخصوبة الكلى .

الحـــــــــل

$$\text{معدل الخصوبة العام} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء أثناء السنة}}{\text{عدد الإناث في سن الحمل في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$\frac{1075}{6460} \times 1000 = 166.40 \text{ في الألف .}$$

$$\text{معدل الخصوبة العام} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء أثناء السنة}}{\text{عدد الإناث في سن الحمل في منتصف السنة}} \times 1000$$

$$= \frac{1075}{6460} \times 1000 = 166 \text{ في الألف}$$

٢- معدلات الخصوبة العمرية وكذلك معدلات الخصوبة العام في الجدول التالي :

فئة العمر	عدد الإناث	عدد المواليد	معدلات الخصوبة العمرية	معدلات الخصوبة العمرية الكلية
١٥-	٩٨٠	٢٠٠	٢٠٤,١	١٠٢٠,٥
٢٠-	٧٥٠	٢٥٠	٣٣٣,٣	١٦٦٦,٥
٢٥-	٨٣٠	١٨٠	٢١٦,٩	١٠٨٤,٥
٣٠-	١١٠٠	٢٩٠	٢٦٣,٦	١٣١٨
٣٥-	١٢٠٠	١٢٠	١٠٠	٥٠٠
٤٠-	٩٥٠	٣٠	٣١,٦	١٥٨
٤٥-٥٠	٦٥٠	٥	٧,٥	٣٨,٥
المجموع	٦٤٦٠	١٠٧٥	١١٥٧,٢	٥٧٨٦

ومن الجدول تظهر معدلات الخصوبة العمريه لكل فئة في العمود الرابع وقد تم الحصول على بيانات هـذا العمود بقسمة عدد المواليد على عدد الإناث المقابل والضرب في ١٠٠٠ أما معدلات الخصوبة العمرية الكلية في العمود الخامس فقد تم حسابها بضرب بيانات العمود الرابع

(معدلات الخصوبة العمريه) في طول الفئة (٥)

٣- معــدل الخصــوبة الكلــية =مجموع معدلات الخصوبة العمريه الكلية من الجدول)= ٥٧٨٦لكل ١٠٠٠انثى أو = ١١٥٧,٢ × ٥ أو = ٥٧٨٦لكل ١٠٠٠انثى أو = ٥,٧٨مولود حي لكل أنثى ويعني ذلك أن كل أنثى سوف

تنجب تقريبا ٥,٧٨مولود حي وذلك بافتراض أنها سوف تبقى على قيد

الحياة طول فترة الحمل من ١٥_٤٩ سنة.

مثال(٤)

البيانات التالية خاصة بإعداد السيدات في سن الحمل وعدد المواليد أحياء وعدد الإناث إحياء في أحدى الدول في سنة ١٩٩٦بالألف.

١- معدلات الخصوبة العمرية الكلية لكل فئة عمرية ومعدل الخصوبة الكلي.

٢- معدل الخصوبة العمرية للإناث حسب فئات العمر ومعدلات الخصوبة الكلية للإناث لكل فئة عمرية.

٣_حساب معدل التوالد الاجمالي.

وذلك من بيانات الواردة في الجدول التالي .

فئات العمر	١٥_	٢٠_	٢٥_	٣٠_	٣٥_	٤٠_	٤٥_٥٠
عدد السيدات في سن الحمل	١٩٠٨	١٥٨٠	١٤١٠	١٢٣١	٨٤٥	٦٩٢	٥٣٤
عدد المواليد أحياء	٢٢٠	٣٥١	٣٦٠	٢٤٦	١٨٧	٤٥	٩
عدد المواليد أحياء من الإناث	١٠٠	١٥٠	١٦٥	١٣٠	٩١	٢٠	٤

الحـــــل

فئة العمر	عدد السيدات في سن الحمل	عدد المواليد أحياء	عدد المواليد أحياء من الإناث	معدل الخصوبة النوعية	معدلات الخصوبة النوعية الكلية	معدلات التوالد النوعية	معدلات النوعية الكلية
-١٥	١٩٠٨	٢٢٠	١٠٠	١١٥,٣	٥٧٦,٥	٥٢,٤	٢٦٢
-٢٠	١٥٨٠	٣٥١	١٥٠	٢٢٢.٢	١١١١	٩٤,٩	٤٧٤,٥
-٢٥	١٤١٠	٣٦٠	١٦٥	٢٥٥,٣	١٢٧٦,٥	١١٧	٥٨٥
-٣٠	١٢٣١	٢٤٦	١٣٠	١٩٩,٨	٩٩٩	١٠٥,٦	٥٢٨
-٣	٨٤٥	١٨٧	٩١	٢٢١,٣	١١٠٦,٥	١٠٧,٧	٥٣٨,٥
-٤	٦٩٢	٤٥	٢٠	٦٥٠	٣٢٥	٢٨,٩	١٤٤,٥
٥٠-٤٠	٥٣٤	٩	٤	١٦,٧	٨٤	٧,٥	٣٧,٥
المجموع	٨٢٠٠	١٤١٨	٦٦٠	١٠٩٥.٧	٥٤٧٨,٥	٥١٤	٢٥٧٠

١- معدلات الخصوبة العمرية في عمود رقم (٥).

معدلات الخصوبة النوعية الكلية في عمود رقم (٦).

معدل الخصوبة الكلى = مجموع معدلات الخصوبة النوعية الكلية =٥٤٧٨,٥ لكل ١٠٠٠سيدة .



٢- معدلات الخصوبة العمرية للإناث (التوالد) في عمود رقم (٧)٠

معدلات الخصوبة العمرية الكلية للإناث (التوالد النوعية الكلية) في عمود رقم (٨)

٣- معدل التوالد الاجمالى=مجموع معدلات التوالد النوعية الكلية =٢٥٧٠ لكل ١٠٠٠سيدة

مثال(٥)

في المثال السابق إذا كانت احتمالات البقاء على قيد الحياة للمواليد الإناث لكل فئة عمرية كالاتى :

فئة العمر	١٥-	٢٠-	٢٥	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-٥٠
احتمال البقاء على قيد الحياة	٠,٨٩	٠,٨٣	٠.٨٣	٠,٨١	٠,٧٥	٠,٧١	٠,٧

احسب معدل التوالد الصافى٠

الحـــــــل

فئة العمر	عدد السيدات في سن الحمل	عدد المواليد إناث	معدلات الخصوبة العمرية للإناث	احتمال البقاء على قيد الحياة	معدل التوالد النوعي الصافي
١٥-	١٩٠٨	١٠٠	٥٢,٤	٠,٨٩	٤٦,٦٤
٢٠-	١٥٨٠	١٥٠	٩٤,٩	٠,٨٢	٧٧,٨٢
٢٥-	١٤١٠	١٦٥	١١٧	٠,٨٣	٩٧,١١
٣٠-	١٢٣١	١٣٠	١٠٥,٦	٠,٨١	٨٥,٥٤
٣٥-	٨٤٥	٩١	١٠٧,٧	٠,٧٥	٨٠,٧٧
٤٠-	٦٩٢	٢٠	٢٨,٩	٠,٧١	٢٠,٢٥
٤٥-	٥٤٣	٤	٧,٥	٠,٧	٥,٢٥
المجموع	٨٢٠٠	٦٦٠	٥١٤		٤١٣,٦٥

معدل التوالد الصافي = مجموع معدلات التوالد النوعية الصافية × ٥

= ٤١٣,٦٥ × ٥ = ٢٠٦٨,٢٥ لكل ١٠٠٠ سيدة

بما أن معدل التوالد أكبر من الواحد يعني ذلك أن السكان سوف يتزايدون

في الجيل القادم ومن الممكن الحصول على معدل التوالد الصافي على انه

مجمـوع معدلات التوالد النوعية الكلية الصافية وتعبر عن معدلات التوالد النوعية الكلية مضروبة في

احتمالات الحياة .

معدلات الخصوبة العمرية	معدلات الخصوبة العمرية للإناث	احتمالات البقاء على قيد الحياة	معدلات الخصوبة العمرية الصافية	معدلات الخصوبة العمرية الكلية الصافية	معدلات الخصوبة العمرية الصافية للإناث	معدلات الخصوبة العمرية الكلية الصافية للإناث
١١٢,٢٣	٥٥,٠٠	٠,٨٣٩	٩٤,١٦	٤٧٠,٨٠	٤٦,٤٨	٢٣٢,٤٠
٢٠٩,١٢	١٠٣,٩٠	٠,٨٣١	١٧٣,٧٨	٨٦٨,٩٠	٨٦,٣٤	٤٣١,٧٠
٢٢٤,٩٢	١١٠,٤٠	٠,٨٢٢٤	١٨٤,٩٧	٩٢٤,٨٥	٩٠,٧٩	٤٥٣,٩٥
١٥٧,١٠	٧٨,٠٠	٠,٨١٥	١٢٨,٠٤	٦٤٠,٢٠	٦٣,٧٥	٣١٧,٨٥
٩٥,١٠	٤٧,٠٠	٠,٨٠٦	٧٦,٦٥	٣٨٣,٢٥	٣٧,٨٨	١٨٩,٤٠
٣١,٢٩	١٣,٤١٦	٠,٧٤٩	٢٤,٨٤	١٢٤,٢٠	١٠,٦٥	٥٣

من الجدول السابق يمكن حساب معدل التوالد الصافي كما يلي:

١- معدل التوالد الصافي =

٥٣٩

٦٩١,٣٦ × ٥ × ------------ = ١٧٠٤,٨٦مولودا لكل ١٠٠٠ انثى.

١٠٣٩

أو معدل التوالد الصافي =

٥٣٩

٣٤٥٦,٨× ----------- =١٧٠٤,٨٦ مولودا لكل ١٠٠٠ أنثى

١٠٩٣

أو معدل التوالد الصافي = ٣٤٠,٩٤×٥=١٧٠٤,٨٦مولودا لكل ١٠٠٠انثى

معدل التوالد الصافي = مجموع معدلات الخصوبة العمرية الكلية للإناث

(العمود الأخير)=١,٠٧٣,٢ مولودا لكل أنثى

(ملحوظة: الاختلاف في قيمة المعدل نتيجة عمليات التقريب)

١٧٠٤

وفى جميع الحالات فان متوسط عدد المواليد للأنثى = --------- = ١,٧٠٤ للأنثى الواحدة

١٠٠٠

وحيث أن ١,٧٠٤ > ١ فإن هذا يعني أن السكان سوف يتزايدون في الجيل القادم .

مثال (٦)

في المثال السابق افترض أننا أضفنا إلى بياناتة احتمالات البقاء على قيد الحياة للمواليد الإناث في الفئات العمرية المختلفة وكانت كالاتى :

فئات الأعمار	١٥ -	٢٠ -	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٥٠-٤٠
احتمال البقاء على قيد الحياة	٠,٨٣٩	٠,٣١	٠,٨٢٢٤	٠,٨١٥	٠,٨٠٦	٠,٧٩٤	٠,٧٨٢

والمطلوب :حساب معدل التوالد الصافي ومعدلاتة :

الجدول الاتى يبين الحسابات اللازمة لحساب معدل التوالد الصافي بالطرق المختلفة:-

فئات الأعمار	عدد الإناث في سن الحمل	عدد المواليد من النوعين	عدد المواليد الإناث	معدلات الخصوبة العمرية	معدلات الخصوبة العمرية للإناث	احتمالات البقاء على قيد الحياة	معدلات الخصوبة العمرية الصافية	معدلات الخصوبة العمرية الكلية الصافية	معدلات الخصوبة العمرية الصافية للإناث	معدلات الخصوبة العمرية الكلية الصافية للإناث
	١٩٨٧	٢٢٣	١١٠	١١٢.٢٣	٥٥.٠٠	٠.٨٣٩	٩٤.١٦	٤٧٠.٨٠	٤٦,٤٨	٢٣٢,٤٠
--١٥	١٤٩٢	٣١٢	١٥٥	٢٠٩.١٢	١٠٣.٩٠	٠.٨٣١	١٧٣.٧٨	٨٦٨.٩٠	٨٦,٣٤	٤٣١.٧٠
٠	١١٩٦	٢٦٩	١٣٢	٢٢٤.٩٢	١١٠.٤٠	٠.٨٢٢٤	١٨٤.٩٧	٩٢٤.٨٥	٩٠.٧٩	٤٥٣.٩٥
--٢٥	١٠٢٥	١٦١	٨٠	١٥٧,١٠	٧٨,٠٠	٠,٨١٥	١٢٨.٠٤	٦٤٠,٢٠	٦٣,٥٧	٣١٧.٨٥
-١٠	٩٥٧	٩١	٤٥	٩٥,١٠	٤٧,٠٠	٠,٨٠٦	٧٦.٦٥	٣٨٣.٢٥	٣٧.٨٨	١٨٩.٤٠
-٤٠	٨٩٥	٢٨	١٢	٣١,٢٩	١٣,٤١٦	٠,٧٩٤	٢٤.٨٤	١٢٤,٢٠	١٠,٦٥	٥٣,٢٥
٥٠-٤٨	٧٨٩	٩	٥	١١,٤١	٣٠	٠,٧٨٢	٨,٩٢	٤٤,٦٠	٤٠٩٣	٢٤,٦٥
المجموع	٨٣٤١	١٠٩٣	٥٣٩	٨٤١,١٠	٤١٤,٤١	٨١٩,٨٧٤٤	٦٩١,٣٦	٣٤٥٦,٨٠	٣٤٠,٩٤	١٧٠٣,٢٠

من الجدول السابق يمكن حساب معدل التوالد الصافي كما يلي :

٥٣٩

١- معدل التوالد الصافي =٦٦١،٣٦×٥× -------------- = ١٧٠٤،٦٨ مولودا

١٠٩٣

لكل ١٠٠٠ أنثى .

٥٣٩

٢- معدل التوالد الصافي =٣٤٥٦،٨ × ----------- =١٧٠٤،٦٨ مولودا

١٠٩٣

لكل ١٠٠٠ أنثى .

٣ معدل التوالد الصافي =٣٤٠،٩٤ ×٥ = ١٧٠٤،٦٨ مولودا لكل ١٠٠٠ أنثى

٤ معدل التولد الصافي = مجموع معدلات الخصوبة العمرية الكلية للإناث (العمود الأخير)

=١٠٧٤،٢ مولودا لكل أنثى.

ملحوظة :الاختلاف في قيمة المعدل نتيجة عمليات التقريب

١٧٠٤

وفي جميع الحالات فان متوسط عدد المواليد للأنثى = ---------- = ١،٧٠٤

١٠٠٠

للأنثى الواحدة .

وحيث أن ١،٧٠٤ >١ فأن هذا يعني أن السكان سوف يتزايدون في الجيل القادم .

مثال ٧

من بيانات الجدول الاتى :

فئة الأعمار	عدد الإناث في سن الحمل بالألف	عدد المواليد الكلى	عدد المواليد للإناث	احتمال البقاء على قيد الحياة
١٥ –	١٢٠	٣٢٦٤	١٥٩٠	٠,٨٣٧
٢٠ –	١٠٥	١٢٧٥٠	٦٢٣٠	٠,٨٣١
٢٥ –	١٣٥	١٥٥٨٠	٧٨٠٠	٠,٨٢٤
٣٠ –	١٥٥	١٣٢٦٨	٦٥٣٠	٠,٨١٥
٣٥ –	١٥٠	٦٥٢٥	٣٢٤٠	٠,٨٠٦
٤٠ –	١٣٠	١٦١٠	٧٨٥	٠,٧٩٤
٤٥–٥٠	١٢٠	١٠٨	٥٥	٠,٧٨٢
المجموع	٩١٥	٥٣١٠٥	٢٦٢٣٠	

المطلوب حساب :

١ - معدل المواليد الخام (إذا علمت أن عدد السكان في هذة الدولة ٢,٣ مليون نسمة)

٢- معدل الخصوبة العام .

٣- معدل الخصوبة الكلية .

٤ - معدل التوالد الاجمالى .

٥ - معدل التوالد الصافي .

إرشادات الحل

١- معدل المواليد الخام =٢٣,١ في الإلف .

١- معدل الخصوبة العام =٥٨ في الإلف .

٣- معدل الخصوبة الكلية =٤٠٦,٤ ×٥ =٢٠٣٢

∴ المتوسط للأنثى الواحدة = ٢,٠٣٢ مولودا حيا للأنثى الواحدة

٢٦٢٣٠

٤- معدل التوالد الاجمالى =٢٠٣٢ × ---------- = ١٠٠٣,٦٥ **في الألف**

٥٣١٠٥

١٠٠٣

∴ المتوسط للأنثى الواحدة = ------------ = ١,٠٠٣

١٠٠٠

٥- معدل التوالد الصافي = ٠,٨٢٤٥ لكل أنثى

∴ المتوسط للأنثى الواحدة = ٠,٨٢٤٥ لكل أنثى

وحيث أن معدل التوالد الصافي أقل من الواحد الصحيح فان معنى ذلك أن عدد السكان سوف يتناقصون في الجيل القادم .

مثال (٨)

من الجدول الاتى :

فئة الأعمار	معدل الخصوبة العمرية	احتمال البقاء على قيد الحياة
١٥ –	١٧,٣٤	٠,٩٢٥
٢٠ –	٩٥,٥٠	٠,٩١٤
٢٥ –	١٢٢,٦٧	٠,٩٠٤
٣٠ –	٦٧,١٣	٠,٨٩١
٣٥ –	٢٤,٤٣	٠,٨٧٨
٤٠ –	٤,٣١	٠,٨٦٥
المجموع	٣٣١,٥٣	

المطلوب :

١ معدل التوالد الإجمالي إذا علمت أن نسبة النوع (الجنس) عند الميلاد =١٠٥

(أي ١٠٥ مولود ذكر لكل ١٠٠ مولود أنثى)

٢ معدل التوالد الصافي وما هي دلالتة ؟

إرشادات الحل

١ - معدل التوالد الاجمالى = ١٦٥٧ × $\frac{١٠٠}{٢٠٥}$ = ٨٠٨ لكل ألف أنثى

٢- معدل التوالد الصافي = ١٠٠× ٥× $\frac{٢٢٩,٣٤}{٢٠٥}$ = ٧٣٠ لكل ألف أنثى

متوسط المواليد للأنثى الواحدة = $\frac{٧٣٠}{١٠٠٠}$ = ٠,٧٣٠ >١

وحيث ٠,٧٣٠ >١ فان معنى ذلك أن عدد السكان سوف يتناقصون في الجيل القادم

معايرة معدلات الوفيات :

معروف انه لا يمكن مقارنة معدلات الوفيات الخام (أو معدلات المواليد الخام بمنطقتين أو أكثر) تختلفان في توزيع الأعمار .

فاذا كان هناك مجتمعات أ . ب وكانت معدلات الوفيات الخام فيهما على الترتيب هي ١٣,٨ ؛ ١٢,٢ في الألف ؛ فان هذة المعدلات تبدو متقاربة جدا ألا أنها لا تعني تساوى أو تشابة الأحوال الصحية في المجتمعين وذلك لان توزيع الأعمار فيهما قد يكون مختلف وهذا التوزيع المشار إلية يلعب دورا هاما في معدلات الوفيات وحتى نتمكن من المقارنة فانه يجب تعديل هذة المعدلات بدلالة توزيع الأعمار وهناك طريقتان هما الطريقة المباشرة

والطريقة الغير مباشرة وكلاهما يعمل على استبعاد تأثير اختلاف الأعمار بين المجتمعين

وفيما يلي توضيح لكلا من الطريقتين من خلال الأمثلة التالية:-

الطريقة المباشرة في التعديل :

فئات الأعمار	معدل الوفيات النوعي للمجتمع (أ)	معدل الوفيات النوعي للمجتمع (ب)	توزيع السكان القياسي	الوفيات المتوقعة في (أ)	الوفيات المتوقعة في (ب)
٠	٢١,٩	١٦,٨	١٨٥٥٣٦١	٤٠٦٣٢	٣١١٧٠
٥ –	١,٩	١,٤	٣٤٠٩٩٦٣	٦٤٧٩	٤٧٧٤
١٥ –	٢,٧	٢,٤	٣٠٨٠١٦٦	٨٣٦١	٧٣٩٢
٢٥ –	٢,٢	٢,٩	٢٤٨٥٩٥٤	٧٩٥٥	٧٢٠٩
٣٥ –	٥,٥	٤,٢	١٩٣١٩٤٣	١٠٦٢٦	٨٩٢٤
٤٥ –	١٢,٧	٨,٥	١٣٩٦٢٠٩	١٧٧٣٢	١١٨٦٨
٥٥ –	٢٧,٩	١٩,٧	٩٠٧٩٤٥	٢٥٢٣٢	١٧٨٨٧
٦٥ –	٦٤,٠	٤٧,٣	٤٧٧٨٦٨	٣٠٥٨٤	٢٢٦٠٣
٧٥ –	١٦٣,٤	١٤٥,٩	١٨٣٢٠٤	٢٩٩٣٦	٢٦٩٧٥
المجموع	٪١٣,٨	٪١٢,٢	١٥٧٢٨٦١٣	١٧٧٥٩٢	١٣٧٦٩٢

في الجدول السابق أعطينا معدلات الوفاة النوعية بالنسبة للسن في المجتمعين أ ، ب ويراد تعديل معدلات الوفاة حتى يمكن مقارنتهما

١ لذلك نبحث عن توزيع للسكان حسب فئات السن لمجتمع ما نسمية المجتمع القياسي حتى نستخدمة في التعديل(عمود ٤)

٢ نحسب المعدل الخام لكل من البلدين

٣ نقارن معدلات الوفاة النوعية لكل من البلدين

٤ نحسب الوفيات المتوقعة للمجتمع (أ) بغرض أنها حدثت في المجتمع القياسي تحت تأثير توزيع معدلات وفيات المجتمع (أ) ؛وذلك بضرب هذة المعدلات عند كل فئة من فئات السن في عدد السكان القياسي في هذا السن ويوضع الناتج في العمود (٥) . و يكرر هذا مع توزيع معدلات وفيات المجتمع (ب) وتوضع النواتج في العمود (٦) .

اي أنه للحصول على قيم العمود (٥) نضرب قيم العمود (٢) في قيم العمود (٤) وللحصول على قيم العمود (٦) نضرب قيم العمود (٤) في قيم العمود (٣) .

٥ وللحصول على معدل الوفيات القياسي أو المعدل للمجتمع (أ) نقسم مجموع قيم العمود (٥) وهو عدد الوفيات المتوقعة في المجتمع (أ) على مجموع قيم العمود (٤) وهو العدد الكلى للمجتمع القياسي ونضرب الناتج في ١٠٠٠ أي أن :-

$$\text{معدل الوفيات القياسي للمجتمع (أ)} = \frac{\text{عدد الوفيات المتوقع في المجتمع (أ)}}{\text{عدد السكان القياسي}} \times ١٠٠٠$$

١٧٧٥٩٢

معدل الوفيات القياسي (أ) = -------------------------- × ١٠٠٠

١٥٧٢٨٦١٣

= ١١,٣ في الألف

وبنفس الطريقة يمكن الحصول على معدل الوفيات القياسي للمجتمع (ب) بقسمه مجموع قيم العمود (٦) على مجموع قيم العمود (٤) وضرب الناتج في ١٠٠٠

١٣٧٦٩٢

معدل الوفيات القياسي للمجتمع (ب) = --------------------- × ١٠٠٠

١٥٧٢٨٦١٣

= ٨,٧ في الألف

الطريقة الغير مباشرة في التعديل :-

تختلف عن الطريقة المباشرة في أن الطريقة المباشرة يتم التصحيح بإلغاء اختلاف التركيب العمرى للسكان ويصبح المعدل الناتج معبرا عن الحالة الصحية فقط بين البلدين أو بعض العوامل الأخرى التي تؤثر في معدل الوفيات .

أما في حالة الطريقة الغير مباشرة فإننا نلغى أثر اختلاف الأحوال الصحية حتى يتضح أثر العوامل الأخرى ومن بينها التركيب العمرى للسكان .

فئات الأعمار	معدل الوفيات النوعي للمجتمع (أ)	معدل الوفيات النوعي للمجتمع (ب)	توزيع السكان القياسي	الوفيات المتوقعة في (أ)	الوفيات المتوقعة في (ب)
٠	٤٦١٠٠٠	٢٥٥٩٠٠	٥٠	٢٣٠٥٠	١٢٧٩٥
٥ -	٩٩٨٤٠٠	٥٩٨١٠٠	٢,٨	٢٩٧٦	١٦٧٥
١٥ -	١٠١١٦٠٠	٥٩٥١٠٠	٣,٦	٣٦٤٢	٢١٤٢
٢٥ -	١٠٣٠٧٠٠	٥٨٧٤٠٠	٥,٦	٥٧٧٢	٣٢٧٩
٣٥ -	٨٤٥٥٠٠	٤٨١٥٠٠	٩,٢	٧٧٧٩	٤٤٣٠
٤٥ -	٧٢٧٩٠٠	٤٢٢٣٠٠	١٦,٢	١١٧٩٢	٦٨٤١
٥٥ -	٥٩٠٩٠٠	٣٦٦٨٠٠	٣,١٨	١٨٧٩١	١١٦٦٤
٦٥ -	٣١٣١٠٠	٢٤٣	٦٤,٩	٢٠٣٢٠	١٥٧٩٠
٧٥ -	٩٥٤٠٠	٩٤٥٠٠	١٥٢,٥	١٤٥٤٩	١٤٤١١
المجموع	٦٠٧٤٥٠٠	٣٦٤٤٨٠٠	١٥,٤٣	١٠٨٤٩١	٧٣٠٣٧

١ - يعطى هذا الجدول توزيع السكان بالنسبة لفئات الأعمار في مجتمعين أ ، ب

(عمودا ٢ ، ٣)

٢- ويعطى معدلات الوفيات النوعية بالنسبة للفئات الأعمار لمجتمع قياسي (عمود ٤)

٣- وللحصول على قيم العمود (٥) وهي الوفيات المتوقعة في مجتمع (أ) ، نضرب قيم العمود (٢) في قيم العمود (٤) ، وللحصول على قيم (٦) وهي الوفيات المتوقعة في مجتمع (ب) نضرب قيم العمود (٣) في قيم العمود (٤) .

٤- ثم نستخرج معدل الوفيات للمجتمع (أ) تحت تأثير المعدلات القياسية كالآتي :-

$$\frac{\text{مجموع قيم العمود (٥)}}{\text{مجموع قيم العمود (٢)}} \times ١٠٠٠$$

$$\frac{١٠٨٤٩١}{٦٠٧٤٥٠٠} \times ١٠٠٠ =$$

= ١٧,٨ في الألف

وبما أن معدل الوفيات الإجمالي للمجتمع هو ١٥,٤ في الألف إذن يمكن استخراج ما يسمى بالمعامل القياسي كالآتي :-

$$\text{معدل القياسي} = \frac{\text{معدل الوفيات للمجتمع القياسي}}{\text{معدل الوفيات للمجتمع (أ) تحت تأثير المعدلات القياسية}}$$

١٥,٤

= ------------ = ٠,٨٦

١٨,٨

ثم نوجد معدل الوفيات القياسي المطول للمجتمع (أ) بضرب معدل الوفيات الأولى لهذا المجتمع في المعامل كالآتي :-

معدل الوفيات القياسي المطلوب للمجتمع (أ)

= ١٣,٨ × ٠,٨٦ = ١١,٨٦٨ في الألف

حيث ١٣,٨ هو معدل الوفيات الخام للمجتمع (أ)

ويمكن تطبيق نفس الخطوات السابقة على المجتمع (ب) هكذا :

معدل الوفيات للمجتمع (ب) تحت تأثير المعدلات القياسية :-

مجموع قيم عمود (٦)

= ------------------------------ × ١٠٠٠

مجموع قيم العمود (٣)

٧٣٠٣٧

= ----------------- × ١٠٠٠ = ٢٠ في الألف

٣٦٤٤٨٠٠

١٥,٤

المعامل القياسي = ---------- = ٠,٧٥ تقريبا

٢٠

إذا معدل الوفيات القياسي للمجتمع (ب) = ١٢,٢ × ٠,٧٥

حيث ١٢,٢ معدل الوفيات الخام للمجتمع (ب)

الفصل الرابع

حجم السكان

يقصد بحجم (عدد) السكان في دولة ما ويفيد تقرير حجم السكان في قياس معدل النمو السكاني خلال فــترة زمنيه في المجتمع قيد البحث - وتستخدم بعض الطرق الرياضية في تقدير عدد السكان ومثال ذالك طرق المتوالية العددية و المتوالية الهندسية و الفائدة المركبة و الدالة الآسية

أولا- طريقة المتوالية العددية :

في هذة الحالة يستخدم قانون المتوالية العددية التالي :-

ل= أ+ (ن-١) × د

حيث أن:

أ = عدد السكان في بداية الفترة

ل = عدد السكان في نهاية الفترة

ن = عدد السنوات

د = مقدار النمو السكاني في العدد للسكان

مثال (١)

بفــرض أن عــدد السكان في دولة معينة= ١٠٠مليون نسمة في عام ٢٠٠١م أوجد عدد سكان هذه الدولة عام ٢٠١١م وذلك إذا علم أن مقدار النمو السكاني في هذة الدولة يساوى مليون نسمة

الحل

من المعلومات المتاحة يلاحظ أن :-

أ= ١٠٠مليون نسمة

ل= عدد السكان المطلوب تقديره

ن= ١٠سنوات

د= مليون نسمة

إذا ل= أ+(ن-١) د

= ١٠٠+ (١٠-١) ×١

=١٠٠+٩= ١٠٩ مليون نسمه

ثانيا : طريقة المتوالية الهندسية :-

نستخدم في هذه الحالة قانون المتوالية الهندسية وهو ينص على :-

ل = أ ر ن-٨

حيث أن :

ا = عدد السكان في بداية الفترة

ل = عدد السكان في نهاية الفترة

ن = عدد السنوات

ر= نسبه التغير السنوي

مثال (٢)

بفــرض أن عدد السكان في دولة معينه عام ١٩٥٠م يساوى عشره ملايين وان عدد السكان في هذه الدولة يساوى مائه مليون نسمة عام ٢٠٠٠م

أوجد نسبه الزيادة السكانية في هذه الدولة

الحــــــــــل

في هذه الحالة

ا = ١٠ مليون نسمة

ل =١٠٠ مليون نسمه

ن =٥٠ سنه

ر = ؟؟

إذا ل = ارن-١

١٠٠ = ١٠(ر) ٥٠-١

ر٤٩ = ١٠٠ / ١٠

وبأخذ لوغاريتم الطرفين .

٤٩ لو ر = لو١٠ =١

لو ر = ١ / ٤٩ ومنها لو ر = ٠,٠٢٠٤٩٤

وباستخدام جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات ينتج أن ر= ١,٠٤٤

.. نسبة الزيادة السنوية = (ر-١) = ٠٠,٠٤٤

ثالثا : طريقة الخط المستقيم :

تقوم هذه الطريقة على أساس افتراض زيادة السكان بمقدار ثابت في وحدة الزمن (السنة) خلال فترة زمنية معينة .

وفى هذه الحالة يتم استخدام معادلة الخط المستقيم على النحو التالي :

ص = أ + ب ن

حيث :

أ = عدد السكان في بداية الفترة .

ص = عدد السكان في نهاية الفترة

ن = عدد السنوات

ب = معدل النمو الثانوي لعدد السكان

يمكن قياس معدل النمو الثانوي لعدد السكان (ب)

بالعلاقة التالية :-

$$ب = \frac{ص - أ}{ن}$$

مثال (٣)

إذا كان عدد السكان في دولة معينة عام ١٩٩٥م يساوى مائة مليون نسمة وعدد السكان في هذه الدولة

عام ٢٠٠٠ م يساوى ١٢٠ مليون . أوجد معدل النمو الثانوي لعدد السكان في هذه الدولة .

الحـــــــــــــل

أ= ١٠٠ مليون   ص = ١٢٠ ن = ٥ سنوات   ب = ؟؟

$$\text{بما أن ب} = \frac{\text{ص} - \text{أ}}{\text{ن}}$$

$$\text{إذا ب} = \frac{١٢٠ - ١٠٠}{٥} = \text{٤ مليون نسمة}$$

رابعاً : طريقة الوسط الهندسي :

يســتخدم الوسط الهندسي في الدراسات السكانية لقياس نسبة التغير في عدد السكان خلال فترة زمنية معينة وتقدير حجم السكان في أي سنة من السنوات .

موضع الدراسة – ويتم ذلك باستخدام العلاقة الرياضية التالية :–

$$\text{ر} = \frac{\text{ل}}{\text{أ}}$$

حيث :-

ا- عدد السكان في بداية الفترة .

ل- عدد السكان في نهاية الفترة .

ن- عدد السنوات .

ر- نسبه التغير السنوية في عدد السكان (الوسط الهندسي

مثال (٤)

إذا كـــان عدد السكان في دولة معينة عام ١٩٥٠ م = ١٠٠ مليون نسمة وعدد السكان في هذه الدولة

عام ٢٠٠٠م = ١٠٠٠ مليون نسمة .

والمطلوب إيجاد :

١- نسبة التغير السنوية .

٢- تقدير حجم السكان عام ٢٠١٠ م

٣- حساب السنة التي سيتضاعف فيها عدد السكان بالنسبة لعدد السكان عام ٢٠٠٠م .

الحـــــــــــــــل

١- في هذه الحالة :-

$$\text{نسبة التغير السنوي ر} = \frac{\text{ل}}{\text{أ}}$$

$$\text{ر} = \frac{1000}{100}$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين :

$$\text{لو ر} = \frac{(\text{لو } 1000 - \text{لو } 100)}{50} = \frac{3-2}{50}$$ حيث (٥٠/١) = ٠,٠٢

ومنها ر= ١,٠٤٣

ويلاحظ أن نسبه الزيادة السنوية في عدد السكان يساوى :-

ل

(-------- - ١) × ١٠٠٠) = (ر-١))× ١٠٠٠

أ

= (١,٠٤٣ -١)×١٠٠٠= ٠,٠٤٣ × ١٠٠٠ =٤٣ في الألف

٢- بفرض أن ..

ل= عدد السكان عام ٢٠١٠م

أ=عدد السكان عام ١٩٥٠م

ن = عدد السنوات

وحيث أن ..

ل

ر= --------

أ

١

لو ر = -------- (لو ل- لو ١)

ن

لو ل = لو أ + ن لو ر

= لو ١٠٠+٦٠×٠,٠٢ = ٢ + ١,٢ = ٣,٢

إذا ل = ١٥٨٥ مليون نسمه

٣- ويمكـــن تحديـــد عدد السنوات التي سيتضاعف فيها عدد السكان باستخدام الصيغة المذكورة سابقا وهى :-

$$ر = \frac{ل}{أ}$$

$$إذا\ لو\ ر = \frac{(لو\ ل - لو\ أ)}{ن}$$

$$إذ\ ن = \frac{(لو\ ل - لو\ أ)}{لو\ ر}$$

مثال ٥

في المثال السابق أوجد عدد السنوات التي سيتضاعف فيها عدد السكان عما كان عليه عام ٢٠٠٠م .

الحـــــــــــل

في هذه الحالة

أ = ١٠٠٠مليون نسمه

ل = ٢٠٠٠ مليون نسمه

لو ر =٠,٠٢

ن = (عدد السنوات) = ؟

$$\text{إذا ن} = \frac{(\text{لو ل} - \text{لو أ})}{\text{لو ر}}$$

$$= \frac{(\text{لو}٢٠٠٠ - \text{لو}١٠٠٠)}{٠,٠٢}$$

٣,٣٠١٠ - ٣

= ١٦٥,٠٥ سنة

٠,٠٢

ويمكن تطوير الرموز السابقة لتكون أكثر ملائمة للإحصاءات السكانية على النحو التالي :-

١- أ = (عدد السكان في بداية الفترة)= ك ٠

٢- ل= (عدد السكان في نهاية الفترة) =ك ن

حيث ن عدد السنوات

هذا من ناحية أخرى فأنة يمكن اعتبار ان

أ تمثل عدد السكان في التعداد السكاني السابق كما أن

ل تمثل عدد السكان في التعداد السكاني اللاحق..

وعلى هذا الأساس فان..

ك٠= عدد السكان في التعداد السابق .

ك ن =عدد السكان في التعداد اللاحق

ن = عدد السنوات التي تفصل بين التعدادين

وفى ضوء ما سبق فان

ك ن

ر

ك ٠

(لو ك ن – لو ك ٠)

ر = ――――――――

لو ر

وجديـــر بالذكر في هذا المجال امكانيه استخدام الوسيط الهندسي لايجاد عدد السكان في منتصف الفترة بين تعدادين باستخدام القانون التالي

ك ٠

ر = --------

ك ن

مثال ٦

إذا كان عدد السكان في دوله معينة عام ١٩٥٠م يساوى عشرة ملاين وعدد السكان في هذه الدولة عام ٢٠٠٠م يســاوى ألــف ملــيون نسمة فأوجد عدد السكان في هذه الدولة في منتصف الفترة بين هذين التعدادين اى عام ١٩٧٥م٠

الحــــــــــــل

عدد السكان المطلوب = ك١ ك٠

= ١٠٠٠×١٠

= مائة مليون نسمة

خامسا .. طريقه الفائدة البسيطة

من المعلوم أن قانون إيجاد الجملة في حالة الفائدة البسيطة كما يلي ٠

ج = أ (١+ع ن) حيث أن :-

أ = راس المال المستثمر

ع = معدل الفائدة

ن = مدة الاستمرار

ج = جملة المبلغ المستثمر

ويمكـن استخدام هذا القانون في تقدير عدد السكان مع تعديل تعريفات معالم هذا القانون على النحو التالي :-

أ-عدد السكان في التعداد السابق

ج - عدد السكان في التعداد اللاحق

ن- عدد السنوات بين التعدادين

ع - معدل الزيادة السكانية سنويا

اى أن :- أ = ك٠ ، ج = ك ن

إذا ك ن = ك٠ (١ + ع ن

مثال (٧)

إذا كـان عـدد السكان في دولة معينة عام ١٩٩٠م يساوى عشرة ملايين نسمة وعدد السكان في هذة الدولة عام ٢٠٠٠م يساوى ٢٠ مليونا فأوجد معدل زيادة السكان سنويا.

الحـــــــل

في هذة الحالة:

ك٠=١٠ مليون نسمة

ك ن= ٢٠مليون نسمة

ن = ١٠ سنوات

إذا ك ن = ك٠ (١+ع ن)

٢٠= ١٠ (١+١٠ع)

١ + ١٠ع = ٢

١٠ ع = ١

$$ع = \frac{١}{١٠} = ٠,١٠$$

سادسا : طريقة الفائدة المركبة:

في هذة الحالة : ج = أ (١ + ع) ن

أي أن:

إذا : ك ن = ك ٠ (١+ع) ن

مثال (٨)

إذا كـــان عدد السكان في دولة معينة عام ١٩٩٠م يساوى عشرة ملايين نسمة فأوجد عدد السكان في هذة الدولة عام ٢٠٠٠م مع العلم بأن معدل الزيادة السكانية السنوية يساوى ٠,٠٣.

الحـــــــــــــل

في هذة الحالة :

$ك_0$ = ١٠ مليون نسمة ٠

ع = ٠,٠٣٠ ن = عشر سنوات

ك ن= ؟

إذا : ك ن = ك ٠ (١+ع)^{ن}

=١٠ (١ + ٠,٠٣)^{١٠} = ١٠ × (١,٠٣)^{١٠}

=١٠ ×١,٣٤٣٩١٦ =١٣,٤٣٩١٦ مليون نسمة

سابعا : طريقة الدالة الآسية :

تختلف معدلات النمو السكاني من دولة لأخرى- و إذا كانت معدلات النمو السكاني في بعض الدول وفقا للطرق الرياضية السابق بيانها إلا أن معدل النمو السكاني في الغالبية العظمى من دول العالم يسير وفقا للدالة الاسية٠

ويمكن كتابة هذة الدالة على النحو التالي:

إذا ك ن =ك٠ هـ ر ن

حيث أن :

$ك_0$ = عدد السكان في التعداد السابق ٠

ك ن = عدد السكان في التعداد اللاحق ٠

ر =معدل النمو السكاني السنوي ٠

ن = عدد السنوات بين التعدادين ٠

هـ أساس اللوغاريتمات الطبيعية ٢,٧١٨

إذا :

$$\frac{\text{ك}_{\text{ن}}}{\text{ك}_{\text{٠}}} = \text{هـ}^{\text{ر ن}}$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس (١٠) ينتج أن :

$$\text{لو} \frac{\text{ك}_{\text{ن}}}{\text{ك}_{\text{٠}}} = \text{ر ن لو هـ}$$

$$\text{إذ : ر} = \frac{\text{لو} \dfrac{\text{ك}_{\text{ن}}}{\text{ك}_{\text{٠}}}}{\text{ن لو هـ}}$$

حيث $\text{لو}_{\text{١٠}}\ \text{هـ} = \text{٠,٤٣٤٣}$

مثال (٩)

إذا كان عدد السكان في دولة معينة عام١٩٩٥م يساوى عشرة ملايين نسمة وعدد السكان فى هذة الدولة عام ٢٠٠٠م يساوى مائة مليون نسمة فأوجد معدل النمو السكاني السنوى.

في هذة الحالة :

$ك_{0}$ = ١٠ مليون نسمة

$ك_{ن}$ = ١٠٠ مليون نسمة

ن = ٥ سنوات .

$$ر = \frac{\text{لو } \dfrac{ك_{ن}}{ك_{0}}}{\text{ن لو هـ}} = \frac{\text{لو } \dfrac{100}{10}}{(5 \times 0,4343)} = \frac{\text{لو } 10}{2,1715}$$

$$\frac{1}{2,1715} = 0,4605111 \text{ مليون نسمة}$$

و بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للعلاقة ينتج أن :

$$\text{لو} \; \frac{\text{ك ن}}{\text{ك٠}} = \text{ر ن}$$

$$\text{إذا ر} = \frac{\text{لو} \; \frac{\text{ك ن}}{\text{ك٠}}}{\text{ن}}$$

حيث أن : لـــو هـ هـ = ١

مثال (١٠) :

في المثال السابق أوجد معدل النمو السكاني السنوي باستخدام الصيغة الرياضية السابقة :

<u>الحـــــــــــل</u>

في هذة الحالة :

$$\frac{\text{لو} \; \frac{\text{ك ن}}{\text{ك٠}}}{\text{ن}}$$

١٠٠

لو ------------------

١٠

٥

١

= ------------- = ٠,٢٠ مليون نسمة ٠

٥

=٢٠٠٠٠٠ نسمة

مضاعفة عدد السكان :

من الأهمية بمكان تقدير الزمن اللازم لمضاعفة عدد السكان على أساس تزايد السكان وفقا للدالة الأسية - وفى هذة الحالة يلاحظ أن :

ك ن = ك. هـ ر ن

ويمكن تحديد الزمن اللازم لمضاعفة عدد السكان في هذه الحالة بوضع ك ن = ٢ ك ٠ في الصيغة الرياضية السابقة ٠

إذا ٢ = هـ ر ن

وبأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس (١٠) ينتج أن :

لو ٢ = رن لو هـ

لو ٢

إذا ن = ------------

ر لو هـ

مثال ١١

إذا كان معدل النمو السكاني الثانوي في دولة معينة يساوى ٠,٠٣ فأوجد عدد السنوات اللازم لمضاعفة عدد السكان .

الحـــــــــــل

لو ٢

بما أن :- ن = -------------

ر لو هـ

٠,٣٠١٠

إذا : -------------------- = ٢٣,١٥ سنة

٠,٠٣ × ٠,٤٣٤٣

ويأخذ لوغاريتم الطبيعي للطرفين للعلاقة (٢ هـ = هـ رن)

ينتج أن :

لو٢ = رن لو هـ هـ وحيث أن لو هـ هـ = ١

إذا لو ٢ = ر ن

$$\text{إذا ن} = \frac{\text{لو٢}}{\text{ر}}$$

مثال (١٢)

في المثال السابق أوجد عدد السنوات اللازم لمضاعفه عدد السكان باستخدام الصيغة الرياضية السابقة .

الحـــــــــــــل

$$\text{ن} = \frac{\text{لو٢}}{\text{ر}}$$

$$= \frac{٠,٣٠١٠}{٠,٠٣٠} = ١٠,٠٣$$

تقدير عدد السكان في منتصف العام

يحتل تقدير عدد السكان في منتصف العام أهميه كبرى نظرا لدوره الهام في حساب النسب والمعدلات والمؤشرات السكانية وإذا كان لدينا عدد السكان في تاريخ معين في سنه معينه (ك ١) وعدد السكان في نفس التاريخ في السنة التالية (ك ٢)

باستخدام الصيغة التالية :

ك١ = ك١ + ٠,٥ (ك٢ - ك١)

مثال (١٣)

إذا كان عدد السكان في أول يناير في عام ٢٠٠٠م يساوى عشرة ملايين نسمة في دولة معينة وعدد السكان في هذة الدولة في أول يناير ٢٠٠١م يساوى ١٢ مليون نسمة فأوجد عدد السكان في منتصف عام ٢٠٠٠م.

الحـــــــــــل

في هذة الحالة :

ك١=١٠ مليون نسمة.

ك٢=١٢مليون نسمة.

ك١=ك١+ ٠,٥ (ك٢-ك١)

=١٠+ ٠,٥ (١٢ – ١٠) = ١٠ + ١ = ١١مليون نسمة.

هذا من ناحية ومن ناحية أخرى إذا وقعت السنة المطلوب تقدير عدد السكان في منتصفها بين تعدادين فإنه يمكن تقدير عدد السكان في منتصف اى سنة من

السنوات الواقعة بين التعدادين باستخدام الصيغة الرياضة التالية:

ك١ = ك١ + (ن / م) (ك٢ – ك١)

حيث :-

ك١= عدد السكان في التعداد الأول

ك٢= عدد السكان في التعداد الثاني

م= عدد الأشهر بين التعدادين

ن= عدد الأشهر بين تاريخ التعداد الأول ومنتصف السنة قيد البحث.

مثال(١٤)

إذا كان عدد السكان في ١٩٩٠/١/١م يساوى مائة مليون في دولة معينة ويساوى ٢٠٠ مليون نسمة في ٢٠٠٠/١/١ في نفس الدولة. والمطلوب تقدير عدد السكان في يونيو ١٩٩٧م

الحـــــــــــــل

ك١= مائة مليون نسمة

ك٢=٢٠٠مليون نسمة

م=١٢٠شهرا

ن= ١٢×٧+٦= ٩٠ شهرا

إذا ك١= ك١ + (ن / م) (ك٢-ك١)

$$= 100 + \frac{90}{120} (200 - 100) = 175 \text{ مليون نسمة}$$

تمارين

<u>تمرين ١</u>

افرض أن لدينا سلعة واحدة وأردنا إيجاد الرقم القياسي لمعرفة التغير الذي حدث لهذه السلعة خلال الفترة (١٩٨٥ ـ ١٩٩٠)

وكانت كمية السلعة عام ١٩٨٥ = ٥٠٠ وحدة

وكانت كمية السلعة عام ١٩٩٠ = ١٠٠٠ وحدة .

وكان سعر السلعة عام ١٩٨٥ = ٢٠ جنيه

وكان سعر السلعة عام ١٩٩٠ = ٨٠ جنيه .

المطلوب :

١- إيجاد الرقم القياسي للسعر (منسوب السعر)

٢- إيجاد الرقم القياسي للكمية (منسوب الكمية)

٣- إيجاد الرقم القياسي للقيمة (منسوب القيمة)

تمرين (٢)

من بيانات الجدول التالي :-

السنوات	١٩٩٠		١٩٩١		١٩٩٢		١٩٩٣	
السلعة	كمية	سعر	كمية	سعر	كمية	سعر	كمية	سعر
	١٠٠٠	٣٠	٢٠٠٠	٤٠	١٦٠٠	٣٣	٢٢٠٠	٦٠

المطلوب :

إيجاد الرقم القياسي للسعر والكمية والقيمة خلال الفترات التالية :-

١- عام ١٩٩٢ / ١٩٩٠ .

٢- عام ١٩٩٣ / ١٩٩١ .

تمرين ٣

فيما يلي أسعار ثلاث سلع في عامي ١٩٨٠ و ١٩٨٥ .

السلع	أسعار عام ١٩٨٥	أسعار عام ١٩٨٠
س	٦	٤
ص	١٢	١٠
ع	١٨	١٦

المطلوب :

حساب الرقم التجميعي البسيط لأسعار عام ١٩٨٥ باستخدام أسعار عام ١٩٨٠ كأساس .

تمرين ٤

السلع	الأسعار		الأسعار	
	١٩٨٥	١٩٨٠	١٩٨٥	١٩٨٠
س	٦	٤	٢٦	٢٢
ص	١٢	١٠	٦٠	٢٨
ع	١٨	١٦	٦	٢

والمطلوب :

١- الرقم التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس (لاسبير)

٢- الرقم التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة (باشى)

٣- الرقم القياسي الأمثل للأسعار (فيشر)

تمرين ٥

السلع	الأسعار		الأسعار	
	سنة الأساس	سنة المقارنة	سنة الأساس	سنة المقارنة
أ	١٠	٨	١٠٠	١٥٠
ب	٦	٥,٤	٢٠٠	٢٤٠
ج	٥	٤,٧٥	٣٠٠	٣٣٠

والمطلوب :

١- الرقم التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس (لاسبير)

٢- الرقم التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة (باشى)

٣- الرقم القياسي الأمثل للأسعار (فيشر)

٤- رقم مارشال – ادجورات .

تمرين ٦

السلع	سنة الأساس		سنة المقارنة	
	أسعار	كميات	أسعار	كميات
أ	١٠	٣٠٠	١٢	٢٥٠
ب	٢٠	١٠٠	٢٥	٢٠٠
ج	٥	٢٠٠	٨	١٥٠

المطلوب :

١- الرقم القياسي لأمثل للأسعار (فيشر)

٢- رقم مارشال – ادجوارث .

تمرين (٧)

الجدول الآتي يبين أسعار وكميات ثلاث سلع في عامي ١٩٨٠ و ١٩٨٥ كما يلي :

السلع	١٩٨٥		١٩٨٠	
	أسعار	كميات	أسعار	كميات
أ	٣	١٣	٢	١١
ب	٦	٣٠	٥	١٤
ج	٩	٣	٨	١

المطلوب :

أولا : الرقم القياسي للأسعار باستخدام :

١ - المتوسط الحسابي البسيط للمناسيب .

٢ - المتوسط الهندسي البسيط للمناسيب .

ثانيا : الرقم القياسي للأسعار باستخدام :

١ - المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة (ع. ك.)

٢ - المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة (ع. ك١)

٣ - المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة (ع١ ك.)

٤ - المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة (ع١ ك١)

<u>تمرين ٨</u>

السلع	الكميات			أسعار
	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٨٨
أ	١٠	١٥	١٥	٢٥
ب	٥	١٠	١٥	٤٠
ج	١٥	٢٠	٢٥	٥٠

<u>المطلوب :</u>

١- رقم لاسبير للكميات عام ١٩٨٨ .

٢- رقم لاسبير للكميات عام ١٩٨٩ .

٣- رقم لاسبير للكميات عام ١٩٩٠ .

تمرين ٩

السلع	الكميات			الأسعار		
	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠	١٩٨٨	١٩٨٩	١٩٩٠
أ	١٠	١٥	١٥	٢٥	٣٠	٤٠
ب	٥	١٠	١٥	٤٠	٥٠	٦٠
ج	١٥	٢٠	٢٥	٥٠	٦٠	٧٥

المطلوب :

١- رقم باشى للكميات عام ١٩٨٨ .

٢- رقم باشى للكميات عام ١٩٨٩ .

٣- رقم باشى للكميات عام ١٩٩٠ .

تمرين ١٠

الأتي أسعار وكميات ثلاث سلع في عامي ١٩٨٠ و ١٩٩٠

السلع	١٩٨٥		١٩٨٠	
	الكمية	السعر	الكمية	السعر
س	٦٠٠	٢٥	١٠٠٠	٢٠
ص	٢٠٠	٥٠	٤٠٠	٤٠
غ	٦٠٠	٢٦	٨٠٠	٣٠

المطلوب :

١- الرقم التجميعي البسيط للأسعار .

٢- الرقم التجميعي البسيط للكميات .

٣- الرقم التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس (لاسبير)

٤- الرقم التجميعي البسيط للكميات .

٥- الرقم التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة (باشى)

٦- الرقم القياسي الأمثل للأسعار (فيشر)

٧- الوسط الحسابي للمناسيب المرجح بقيمة السلعة في فترة الأساس .

تمرين ١١

فيما يلي البيانات الخاصة بالمتوسطات ($\bar{س}$) والمدى (ى) والانحراف المعياري (σ) لـ ١٥ عينة كل منها ٤ مفردات .

رقم العينة	$\bar{س}$	ى	σ
١	٢١,٥	٨	٣,٢
٢	٣٠	١١	٣,٩
٣	٢٧,٢	٤	٢,٦
٤	٢٩,٦	٦	٢,٢
٥	٣٠,٥	٦	١,٦
٦	٣٥,٥	١٢	٥,٤
٧	٣١,٦	٣	٢,٣
٨	٢٨,٥	٦	٢,٤
٩	٣٣	٨	١,١
١٠	٣١,٦	١٠	٣,٦
١١	٣٣,٨	٥	٣,٣
١٢	٣٥	٣	١,١
١٣	٣٤	٤	١,٩
١٤	٣٨	٩	٣,٢
١٥	٣٦,٦	٧	١,٦
مجـ	٤٨٦	١١٢	٣٩,٤

المطلوب :

عمل خريطة مراقبة الجودة للمتوسط ($\bar{س}$) والمدى (ى) والانحراف المعياري (σ) .

تمرين ١٢

أخذت عشرة عينات عشوائية تحتوى كل منها على ١٠٠ وحدة من عملية إنتاجية وحسبت عدد الوحدات المعيبة بكل منها على ١٠٠ وحدة من عملية إنتاجية وحسبت عدد الوحدات المعيبة بكل منها وكانت كما يلي :

رقم العينة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
عدد الوحدات المعيبة	٣	٤	٥	١	٨	٠	٦	١	٣	٤

المطلوب :

١- تصميم خريطة مراقبة الجودة لنسبة المعيب .

٢- بيان ما إذا كانت عملية الإنتاج في حالة مراقبة إحصائية أم لا .

تمرين ١٣

أخذت ١٢ عينة عشوائية تحتوى كل منها على ٥ أجهزة تلفزيونية من عملية إنتاجية وحسبت عدد الوحدات المعيبة بكل منها وكانت كما يلي :

رقم العينة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
الوحدات المعيبة	١١	١١	١٢	١٠	١٢	١٠	٩	٨	٩	٤	٥	٧

المطلوب :

١- تصميم خريطة مراقبة الجودة لنسبة المعيب .

٢ـ تصميم خريطة مراقبة لعدد العيوب .

٣ـ بيان ما إذا كانت عملية الإنتاج في حالة مراقبة إحصائية أم لا .

تمرين ١٤

إذا كانت لديك البيانات التالية عن شحنة بضاعة :

ن = ١٠٠ ن١ = ٥٠ ن٢ = ١٥٠

م = ٥ م١ = ٨ م٢ = ١٤

حيث (ن ، ن١ ، ن٢) تمثل أحجام العينات المسحوبة وان (م ، م١ ، م٢)

تمثل الوحدات المعيبة المتفق عليها .

المطلوب :

وضح كيفية المعاينة حتى قبول العينات وبالتالي استلام أو عدم استلام الشحنة .

تمرين ١٥

الجدول التالي يبين العمر بالساعات لعشر (١٠) عينات يتكون كل منها من خمسة (٥) مصابيح كهربائية سحبت كل نصف ساعة من العملية الإنتاجية :

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٥٨٦	٥٦٨	٤٣٤	٤٤٢	٤٩٧	٥١٢	٥١٩	٦١٥	٥٢٤	٥٣٤
٦٣٨	٥٤٠	٥٥٣	٥٢٤	٤٥٠	٥٣٥	٥٦٧	٤٨٢	٧٩٠	٥١٤
٥٦٩	٥٨٧	٤٧٠	٦٥٩	٦٧٠	٥٩٣	٥٨٦	٥٣٠	٧٢٣	٥٦٤
٥٥٩	٤٥٥	٤٨٥	٦٢٨	٦٨٣	٥٨٢	٦٠٠	٦١٩	٧١٠	٦٦٤
٦٤٣	٥٢٠	٤٩٨	٥٣٧	٦٢٥	٦٤٣	٦٧٣	٤٩٤	٦٥٨	٦٥٩

المطلوب :

- عمل خريطة مراقبة الجودة للمتوسط (س)

'- عمل خريطة مراقبة الجودة للمتوسط للمدى (ى)

٢- بيان ما إذا كانت عملية الإنتاج في حالة مراقبة إحصائية أم لا .

تمرين ١٦

أخذت ١٥ عينة عشوائية تحتوى كل منها على ١٠ وحدات من عملية إنتاجية وحسبت عدد الوحدات المعيبة بكل منها وكانت كما يلي :

رقم العينة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
الوحدات المعيبة	١	٥	٤	١	٢	٤	٠	٣	١	٣	٠	٥	٢	٤	١

المطلوب :

١- تصميم خريطة مراقبة الجودة لنسبة المعيب .

٢- تصميم خريطة مراقبة الجودة لعدد العيوب .

٣- بيان ما إذا كانت عملية الإنتاج في حالة مراقبة إحصائية أم لا .

تمرين ١٧

بفرض أن عدد السكان في دولة معينة يساوى ٨٠٠مليون نسمة عام ١٩٩٥ م ويساوى ألف مليون نسمة ٢٠٠٠م٠اوجد ما يلي :

ا_ معدل النمو السكاني باستخدام الأساليب التالية:

المتوالية العددية٠

المتوالية الهندسية٠

الفائدة المركبة٠

الفائدة البسيطة٠

معادلة الخط المستقيم٠

(٢) في التمرين السابق المطلوب تقدير عدد السكان في منتصف عام ١٩٩٦م.

(٣) فـي التمريـن الأول المطلـوب تقديـر عـدد السـكان عـام ٢٠١٠م باسـتخدام الأسـاليب الرياضية الستة المذكورة في هذا التمرين.

(٤) في التمرين الأول أوجد عدد السنوات اللازمة لمضاعفة عدد السكان باستخدام الأساليب الرياضية المذكورة = ١٧٥مليون نسمة

الباب الرابع

الإنحدار الخطى المتعدد

درسنا فى الجزء السابق نموذج الإنحدار الخطى البسيط الذى يفترض أن المتغير التابع $\text{ص}_{\text{ر}}$ يعتمد فى تغيره على متغير مستقل واحد وهو $\text{س}_{\text{ر}}$، إلا أن ذلك يعتبر تبسيطا شديدا للواقع، بل وإغفالا لجانب كبير مما هو كائن فى التطبيقات الإقتصادية والإدارية والصناعية والزراعية والبيولوجية...... الخ، حيث نجد فى الواقع أن المتغير التابع $\text{ص}_{\text{ر}}$ يعتمد فى تفسيره على عدد كبير من المتغيرات المستقلة $\text{س}_{١}$، $\text{س}_{٢}$، ......، $\text{س}_{\text{ن}}$ والتى تشترك معا فى تفسير ما يطرأ على المتغير التابع من تغيرات.

وسوف نقوم بتعميم علاقة الإنحدار الخطية البسيطة السابقة تعميما بسيطاً بعض الشئ ونفترض أنه يوجد متغيران مستقلان هما $\text{س}_{١}$، $\text{س}_{٢}$ يؤثران معاً على المتغير التابع ص وأن العلاقة بينهما خطية، فينشأ لدينا نموذج الإنحدار الخطى المتعدد، وتكون الصورة العامة لمعادلة خط إنحدار ص على $\text{س}_{١}$، $\text{س}_{٢}$ (وسوف تكتب إختصاراً ص/ $\text{س}_{١}$، $\text{س}_{٢}$) هى:

$$\text{ص}_{\text{ر}} = \text{أ}_{.} + \text{أ}_{١}\text{س}_{١\text{ر}} + \text{أ}_{٢}\text{س}_{٢\text{ر}} + \text{ق}_{\text{ر}}$$

حيث:

$\text{أ}_{.}$، $\text{أ}_{١}$، $\text{أ}_{٢}$ هى ثوابت معادلة الإنحدار وتمثل معالم المجتمع المطلوب تقديرها. $\text{س}_{١}$، $\text{س}_{٢}$ هما المتغيران المستقلان.

$\hat{ق}_ر$: هى الأخطاء العشوائية أو البواقى أو العوامل الأخرى التى تؤثر على المتغير التابع $ص_ر$ بالإضافة إلى المتغيرين المستقلين $س_1$، $س_2$. وتستخدم طريقة المربعات الصغرى للحصول على أفضل تقديرات ممكنة للثوابت $أ_.$ ، $أ_1$ ، $أ_2$ التى تعظم القوة التفسيرية للنموذج، أى التى تجعل مجموع مربعات البواقى أصغر ما يمكن، ويتم ذلك بأخذ عينة حجمها ن من المشاهدات ص، $س_1$، $س_2$ على الصورة:

($ص_1$، $س_{11}$، $س_{12}$)، ($ص_2$، $س_{21}$، $س_{22}$)،....، ($ص_ن$، $س_{1ن}$، $س_{2ن}$)

فإذا ما اعتبرنا أن مجموعة الفروض التى سبق وضعها فى حالة نموذج الإنحدار الخطى البسيط (بند ٧-١-١-١) مازالت صحيحة وقائمة فى حالة الإنحدار المتعدد ينتج أن:

بفرض أن معادلة الإنحدار المتعدد الخطية المقدرة من العينة على الصورة:

$$\hat{ص}_ر = \hat{أ}_. + \hat{أ}_1 س_{1ر} + \hat{أ}_2 س_{2ر}$$

ويكون تقدير الخطأ العشوائى هو:

$$\hat{ق}_ر = ص_ر - \hat{ص}_ر$$

$$= ص_ر - \hat{أ}_. - \hat{أ}_1 س_{1ر} - \hat{أ}_2 س_{2ر}$$

وبالتالى فإن مجموع مربعات الخطأ هو:

$$مجـ \ \hat{ق}_ر^2 = مجـ (ص_ر - \hat{أ}_. - \hat{أ}_1 س_{1ر} - \hat{أ}_2 س_{2ر})^2$$

بأخذ التفاضل الجزئى لـ مجـ $\hat{ق}_ر^2$ بالنسبة لـ $\hat{أ}_.$ ، $\hat{أ}_1$، $\hat{أ}_2$ على الترتيب ومساواة الناتج بالصفر ينتج أن:

$$\frac{\partial\ \text{مجـ}\ \hat{\text{ق}}_{\text{ر}}^{2}}{\partial\ \hat{\text{أ}}_{.}} = -2\text{مجـ}\ (\text{ص}_{\text{ر}} - \hat{\text{أ}}_{.} - \hat{\text{أ}}_{1}\text{س}_{1\text{ر}} - \hat{\text{أ}}_{2}\text{س}_{2\text{ر}}) = \text{صفر}$$

$$\frac{\partial\ \text{مجـ}\ \hat{\text{ق}}_{\text{ر}}^{2}}{\partial\ \hat{\text{أ}}_{1}} = -2\text{مجـ}\ (\text{ص}_{\text{ر}} - \hat{\text{أ}}_{.} - \hat{\text{أ}}_{1}\text{س}_{1\text{ر}} - \hat{\text{أ}}_{2}\text{س}_{2\text{ر}})\text{س}_{1\text{ر}} = \text{صفر}$$

$$\frac{\partial\ \text{مجـ}\ \hat{\text{ق}}_{\text{ر}}^{2}}{\partial\ \hat{\text{أ}}_{2}} = -2\text{مجـ}\ (\text{ص}_{\text{ر}} - \hat{\text{أ}}_{.} - \hat{\text{أ}}_{1}\text{س}_{1\text{ر}} - \hat{\text{أ}}_{2}\text{س}_{2\text{ر}})\text{س}_{2\text{ر}} = \text{صفر}$$

بحل المعادلات الثلاث السابقة نحصل على المعادلات الطبيعية الآتية:

$$\text{مجـ}\ \text{س}_{1}\text{ص} = \hat{\text{أ}}_{.}\ \text{مجـ}\ \text{س}_{1} + \hat{\text{أ}}_{1}\ \text{مجـ}\ \text{س}_{1}^{2} + \hat{\text{أ}}_{2}\ \text{مجـ}\ \text{س}_{1}\text{س}_{2} \qquad (1)$$

$$\text{مجـ}\ \text{س}_{2}\text{ص} = \hat{\text{أ}}_{.}\ \text{مجـ}\ \text{س}_{2} + \hat{\text{أ}}_{1}\ \text{مجـ}\ \text{س}_{1}\ \text{س}_{2} + \hat{\text{أ}}_{2}\ \text{مجـ}\ \text{س}_{2}^{2} \qquad (2)$$

$$\text{مجـ}\ \text{ص} = \text{ن}\ \hat{\text{أ}}_{.} + \hat{\text{أ}}_{1}\ \text{مجـ}\ \text{س}_{1} + \hat{\text{أ}}_{2}\ \text{مجـ}\ \text{س}_{2} \qquad (3)$$

والمعادلات الطبيعية السابقة بها ثلاثة مجاهيل وهى $\hat{\text{أ}}_{.}$ ، $\hat{\text{أ}}_{1}$، $\hat{\text{أ}}_{2}$ وبحل هذه المعادلات (باستخدام أى أسلوب رياضى مثل المحددات أو المصفوفات) نحصل على التقديرات $\hat{\text{أ}}_{.}$ ، $\hat{\text{أ}}_{1}$، $\hat{\text{أ}}_{2}$ وهى التى تعطى أفضل خط إنحدار يمثل مجموعة المشاهدات وتكون معادلته على الصورة:

$$\hat{\text{ص}}_{\text{ر}} = \hat{\text{أ}}_{.} + \hat{\text{أ}}_{1}\text{س}_{1\text{ر}} + \hat{\text{أ}}_{2}\text{س}_{2\text{ر}}$$

ومجموعة المعادلات الطبيعية (1)، (2)، (3) مكتوبة على صيغة القيم الأصلية للمتغيرات ص، س_{1}، س_{2} ويمكن إثبات أن هذه الصيغة يمكن أن تأخذ صيغة الإنحرافات عن الوسط الحسابى، وتأخذ المعادلات الثلاث السابقة الصورة التالية:

$$\text{مجـ}\ \text{س}'_{1}\,\text{ص}' = \hat{\text{أ}}_{1}\ \text{مجـ}\ \text{س}'^{2}_{1} + \hat{\text{أ}}_{2}\ \text{مجـ}\ \text{س}'_{1}\,\text{س}'_{2} \qquad (٤)$$

$$\text{مجـ}\ \text{س}'_{2}\,\text{ص}' = \hat{\text{أ}}_{1}\ \text{مجـ}\ \text{س}'_{1}\,\text{س}'_{2} + \hat{\text{أ}}_{2}\ \text{مجـ}\ \text{س}'^{2}_{2} \qquad (٥)$$

$$\hat{\text{أ}}_{0} = \overline{\text{ص}} - \hat{\text{أ}}_{1}\,\overline{\text{س}}_{1} - \hat{\text{أ}}_{2}\,\overline{\text{س}}_{2} \qquad (٦)$$

حيث:

$$\text{مجـ}\ \text{س}'_{1}\,\text{ص}' = \text{مجـ}\ (\text{س}_{1\text{ر}} - \overline{\text{س}}_{1})\ (\text{ص}_{\text{ر}} - \overline{\text{ص}})$$

$$\text{مجـ}\ \text{س}'_{2}\,\text{ص}' = \text{مجـ}\ (\text{س}_{2\text{ر}} - \overline{\text{س}}_{2})\ (\text{ص}_{\text{ر}} - \overline{\text{ص}})$$

$$\text{مجـ}\ \text{س}'_{1}\,\text{س}'_{2} = \text{مجـ}\ (\text{س}_{1\text{ر}} - \overline{\text{س}}_{1})\ (\text{س}_{2\text{ر}} - \overline{\text{س}}_{2})$$

$$\text{مجـ}\ \text{س}'^{2}_{1} = \text{مجـ}\ (\text{س}_{1\text{ر}} - \overline{\text{س}}_{1})^{2}$$

$$\text{مجـ}\ \text{س}'^{2}_{2} = \text{مجـ}\ (\text{س}_{2\text{ر}} - \overline{\text{س}}_{2})^{2}$$

وبحل المعادلتين (٤) ، (٥) معاً نحصل على التقديرين $\hat{\text{أ}}_{1}$، $\hat{\text{أ}}_{2}$ ، ثم بالتعويض فى المعادلة (٦) نحصل على قيمة التقدير $\hat{\text{أ}}_{0}$، وبذلك نصل إلى أفضل تقدير لمعادلة الإنحدار الخطى المتعدد المطلوبة.

وكما أوضحنا فى الأجزاء السابقة، فإذا كان أحد أو بعض أو كل الأوساط الحسابية $\overline{\text{ص}}$، $\overline{\text{س}}_{1}$، $\overline{\text{س}}_{2}$ عبارة عن عدد كسرى فإنه يفضل إيجاد التقديرات $\hat{\text{أ}}_{1}$، $\hat{\text{أ}}_{2}$ باستخدام المعادلات الطبيعية (١)، (٢)، (٣) بصيغة القيم الأصلية. أما إذا كانت جميع الأوساط الحسابية $\overline{\text{ص}}$، $\overline{\text{س}}_{1}$، $\overline{\text{س}}_{2}$ عبارة عن أعداد صحيحة فإنه يفضل إيجاد تلك التقديرات باستخدام المعادلات (٤)، (٥)، (٦) بصيغة إنحرافات القيم عن وسطها الحسابى.

ويلاحظ أن التقديرات الثلاث $\hat{\text{أ}}_{0}$ ، $\hat{\text{أ}}_{1}$، $\hat{\text{أ}}_{2}$ تتمتع بنفس الخصائص -المرغوب فيها- السابقة، فهى تقديرات خطية وغير متحيزة ولها أصغر تباين من بين التقديرات الأخرى الخطية الغير متحيزة.

(٧-٢-١) معامل التحديد

بطريقة مماثلة للإنحدار البسيط نجد أنه فى حالة الإنحدار الخطى المتعدد فإن:

مجموع المربعات الكلى= مجموع مربعات الإنحدار+ مجموع مربعات الخطأ

أى أن:

$$\text{م م ك} = \text{م م د} + \text{م م خ}$$

أى أن:

$$\text{مجـ}(\text{ص}_{\text{ر}} - \bar{\text{ص}})^{2} = \text{مجـ}(\hat{\text{ص}}_{\text{ر}} - \bar{\text{ص}})^{2} + \text{مجـ}(\text{ص}_{\text{ر}} - \hat{\text{ص}}_{\text{ر}})^{2}$$

حيث:

$$\text{م م ك} = \text{مجـ}(\text{ص}_{\text{ر}} - \bar{\text{ص}})^{2} = \text{مجـ ص}'^{2}$$

$$\text{م م د} = \text{مجـ}(\hat{\text{ص}}_{\text{ر}} - \bar{\text{ص}})^{2} = \hat{\text{أ}}_{1}\,\text{مجـ س}'_{1}\,\text{ص}' + \hat{\text{أ}}_{2}\,\text{مجـ س}'_{2}\,\text{ص}'$$

$$\text{م م خ} = \text{مجـ}(\text{ص}_{\text{ر}} - \hat{\text{ص}}_{\text{ر}})^{2} = \text{مجـ ص}'^{2} - \hat{\text{أ}}_{1}\,\text{مجـ س}'_{1}\,\text{ص}' - \hat{\text{أ}}_{2}\,\text{مجـ س}'_{2}\,\text{ص}'$$

وفى حالة إستخدام القيم الأصلية، نلاحظ أن:

$$\text{مجـ ص}'^{2} = \text{مجـ ص}_{\text{ر}}^{2} - \frac{(\text{مجـ ص}_{\text{ر}})^{2}}{\text{ن}}$$

$$\text{مجـ س}_{1}'\,\text{ص}' = \text{مجـ س}_{1\text{ر}}\,\text{ص}_{\text{ر}} - \frac{\text{مجـ س}_{1\text{ر}} \times \text{مجـ ص}_{\text{ر}}}{\text{ن}}$$

$$\text{مجـ س}_{2}'\,\text{ص}' = \text{مجـ س}_{2\text{ر}}\,\text{ص}_{\text{ر}} - \frac{\text{مجـ س}_{2\text{ر}} \times \text{مجـ ص}_{\text{ر}}}{\text{ن}}$$

ويكون معامل التحديد - كما سبق أن بينا - عبارة عن:

$$\text{معامل التحديد} = \frac{\text{مجموع مربعات الإنحدار}}{\text{مجموع المربعات الكلى}}$$

اى أن :

$$ر^{٢} = \frac{\hat{أ}_{١} مجـ س'_{١} ص' + \hat{أ}_{٢} مجـ س'_{٢} ص'}{مجـ ص'^{٢}}$$

ويحتفظ معامل التحديد هنا بنفس المعنى السابق حيث يحدد النسبة المئوية للتغيرات التى تحدث فى صر والتى يمكن تفسيرها بواسطة المتغيرين المستقلين $س_{١}$، $س_{٢}$. فعلى سبيل المثال، إذا كانت قيمة معامل التحديد تساوى ٠,٨٢، فإن ذلك يعنى أن ٠,٨٢ من التغيرات التى يمكن أن تحدث فى المتغير التابع ص تعزى إلى التغيرات التى تحدث فى المتغيرين المستقلين $س_{١}$، $س_{٢}$ بينما الـ ٠,١٨ الباقية من التغيرات فى ص فتحدث بسبب العوامل العشوائية الأخرى التى تؤثر فى ص بالإضافة إلى $س_{١}$، $س_{٢}$.

(٧-٢-٢) إختبارات الفروض الإحصائية وفترات الثقة لمعالم معادلة الإنحدار المتعدد

بعد الحصول على التقديرات لمعالم خط إنحدار $ص/س_{١}$، $س_{٢}$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى فلابد من الحكم على جودة هذه التقديرات وما إذا كانت تختلف عن القيم الحقيقية لها بمجتمع الدراسة إختلافاً معنوياً أم لا.

وتتوقف جودة التقديرات – طبقاً للمعايير الإحصائية – على الأخطاء المعيارية لهذه التقديرات، فكلما زاد الخطأ المعيارى للتقدير كلما كان الفرق بين قيمة التقدير وقيمة المعلمة المناظرة له فى المجتمع كبيراً وبالتالى تقل جودة وكفاءة التقدير كمقدر لمعلمة المجتمع المجهولة، والعكس صحيح.

وفى الغالب فإن تباين الأخطاء العشوائيه $\sigma^2_{ى}$ يكون غير معلوم وذلك لأن الأخطاء العشوائية نفسها تكون غير مشاهدة، لذلك سوف نستعين بتقدير تباين الأخطاء العشوائيه $ع^2_{ى}$. ففى حالة خط إنحدار ص/س١،س٢ فإن تقدير تباين الأخطاء العشوائية يأخذ الصورة:

$$ع^2_{ى} = \frac{مجـ ص'^2 - \hat{أ}_1 مجـ س'_1 ص' - \hat{أ}_2 مجـ س'_2 ص'}{ن - ٣}$$

وتتم القسمة على ن- ٣ بدلاً من ن حتى يكون التقدير $ع^2_{ى}$ تقدير غير متحيز للمعلمة $\sigma^2_{ى}$، أى أن تقدير تباين الأخطاء العشوائية (أى $ع^2_{ى}$) والمحسوب بعد القسمة على ن- ٣ يحقق خاصية عدم التحيز المرغوب فيها وهى:

$$ت (ع^2_{ى}) = \sigma^2_{ى}$$

، ن-٣ عبارة عن درجات الحرية وهى تمثل عدد المشاهدات مطروحاً منها عدد القيود (وهى تقديرات الثوابت $أ_0$، $أ_1$، $أ_2$ فى معادلة إنحدار ص/س١، س٢).

وسوف نتعرض أولاً للقيمة المتوقعة والتباين لثوابت معادلة إنحدار ص/س١، س٢ كما يلى:

أولاً: توقع وتباين التقدير $\hat{أ}_1$

يمكن إثبات أن:

$$ت (\hat{أ}_1) = أ_1$$

وهذا يعنى أن التقدير $\hat{أ}_1$ يعتبر تقدير غير متحيز للمعلمة $أ_1$، كما يمكن إثبات أن تباين التقدير $\hat{أ}_1$ أى $ع^2_{\hat{أ}_1}$ – وفى ظل غياب $\sigma^2_ى$ وإستخدام $ع^2_ى$ كتقدير غير متحيز له – يأخذ الصورة:

$$ع^2_{\hat{أ}_1} = \frac{ع^2_ى}{مجـ\, س_1^{/2}\,(1 - ر^2_{1,2})}$$

حيث:

$ر^2_{1,2}$ = مربع معامل الإرتباط بين $س_1$ ، $س_2$

$$= \frac{(مجـ\, س^/_1\, س^/_2)^2}{مجـ\, س_1^{/2} \times مجـ\, س_2^{/2}}$$

وعلى ذلك فإن التقدير $\hat{أ}_1$ يتبع التوزيـــع الطبيـعـــى بوسط حســابـــى= $أ_1$

وتباين = $\frac{ع^2_ى}{مجـ\, س_1^{/2}\,(1 - ر^2_{1,2})}$، ويعبر عن ذلك بالصورة:

$$\hat{أ}_1 \sim N\left(أ_1 ، \frac{ع^2_ى}{مجـ\, س_1^{/2}\,(1 - ر^2_{1,2})}\right)$$

ثانياً: توقع وتباين التقدير $\hat{أ}_2$

يمكن بالمثل إثبات أن:

$ت\,(\hat{أ}_2) = أ_2$

مما يعنى أن التقدير $\hat{أ}_2$ يعتبر تقدير غير متحيز للمعلمة $أ_2$.

كما يمكن إثبات أن تباين التقدير $\hat{\text{أ}}_{٢}$ يأخذ الصورة:

$$\text{ع}^{٢}_{\hat{\text{أ}}_{٢}} = \frac{\text{ع}^{٢}_{\text{ق}}}{\text{مجـ}\ \text{س}'^{٢}_{٢}\ (١ - \text{ر}^{٢}_{١،٢})}$$

وعلى ذلك فإن التقدير $\hat{\text{أ}}_{٢}$ يتبع التوزيع الطبيعى بوسط حسابى = $\text{أ}_{٢}$

وتباين = $\frac{\text{ع}^{٢}_{\text{ق}}}{\text{مجـ}\ \text{س}'^{٢}_{٢}\ (١ - \text{ر}^{٢}_{١،٢})}$، ويعبر عن ذلك بالصورة:

$$\hat{\text{أ}}_{٢} \sim N\left(\frac{\text{ع}^{٢}_{\text{ق}}}{\text{مجـ}\ \text{س}'^{٢}_{٢}\ (١ - \text{ر}^{٢}_{١،٢})}\right)$$

ثالثاً: توقع وتباين التقدير $\hat{\text{أ}}_{.}$

وبالطريقة نفسها يمكن إثبات أن:

$$\text{ت}\ (\hat{\text{أ}}_{.}) = \text{أ}_{.}$$

مما يعنى أن التقدير $\hat{\text{أ}}_{.}$ يعتبر تقدير غير متحيز للمعلمة $\text{أ}_{.}$.

كما يمكن إثبات أن تباين التقدير $\hat{\text{أ}}_{.}$ يكون على الصورة:

$$\text{ع}^{٢}_{\hat{\text{أ}}_{.}} = \frac{\text{ع}^{٢}_{\text{ق}}}{\text{ن}} + \bar{\text{س}}^{٢}_{١}\ \text{ع}^{٢}_{\hat{\text{أ}}_{١}} + \bar{\text{س}}^{٢}_{٢}\ \text{ع}^{٢}_{\hat{\text{أ}}_{٢}} + ٢\ \bar{\text{س}}_{١}\ \bar{\text{س}}_{٢}\ \text{تغا}\ (\hat{\text{أ}}_{١}،\hat{\text{أ}}_{٢})$$

حيث:

$$\text{تغا}(\hat{\text{أ}}_{١}،\hat{\text{أ}}_{٢}) = \text{ع}^{٢}_{\text{ق}} \left[\frac{-\ \text{مجـ}\ \text{س}'_{١}\ \text{س}'_{٢}}{\text{مجـ}\ \text{س}'^{٢}_{١}\ \text{مجـ}\ \text{س}'^{٢}_{٢} - (\text{مجـ}\ \text{س}'_{١}\ \text{س}'_{٢})^{٢}}\right]$$

وبالتالى فإن التقدير $\hat{\text{أ}}_{.}$ يتبع التوزيع الطبيعى بوسط حسابى $\text{أ}_{.}$ وتباين $\text{ع}^{٢}_{\hat{\text{أ}}_{.}}$ الموضح أعلاه ويعبر عن ذلك بالصورة:

$$\hat{\text{أ}}_{.} \sim N\left[\text{أ}_{.}\,,\; \frac{\text{ع}^2_{\text{ق}}}{\text{ن}} + \bar{\text{س}}_1^2\, \text{ع}^2_{\hat{\text{أ}}_1} + \bar{\text{س}}_2^2\, \text{ع}^2_{\hat{\text{أ}}_2} + 2\,\bar{\text{س}}_1\, \bar{\text{س}}_2\, \text{تغا}\,(\hat{\text{أ}}_1 \text{،} \hat{\text{أ}}_2)\right]$$

فإذا كان تباين الأخطاء العشوائية لمجتمع الدراسة أى $\sigma^2_{\text{ق}}$ معلوماً (مهما كان حجم العينة)، أو إذا كان $\sigma^2_{\text{ق}}$ غير معلوم ونستخدم $\text{ع}^2_{\text{ق}}$ كتقدير غير متحيز له وفى نفس الوقت يزيد حجم العينة عن ٣٠ مفرده فإن كل من الكميات:

$$\frac{\hat{\text{أ}}_{.} - \text{ت}\,(\hat{\text{أ}}_{.})}{\sqrt{\text{تبا}\,(\hat{\text{أ}}_{.})}} = \frac{\hat{\text{أ}}_{.} - \text{أ}_{.}}{\sqrt{\frac{\text{ع}^2_{\text{ق}}}{\text{ن}} + \bar{\text{س}}_1^2\, \text{ع}^2_{\hat{\text{أ}}_1} + \bar{\text{س}}_2^2\, \text{ع}^2_{\hat{\text{أ}}_2} + 2\,\bar{\text{س}}_1\, \bar{\text{س}}_2\, \text{تغا}\,(\hat{\text{أ}}_1 \text{،} \hat{\text{أ}}_2)}} \quad (١)$$

$$\frac{\hat{\text{أ}}_1 - \text{ت}\,(\hat{\text{أ}}_1)}{\sqrt{\text{تبا}\,(\hat{\text{أ}}_1)}} = \frac{\hat{\text{أ}}_1 - \text{أ}_1}{\sqrt{\text{ع}^2_{\text{ق}} \big\backslash \text{مجـ}\, \text{س}'^2_1\, (1 - \text{ر}^2_{1،2})}} \quad (٢)$$

$$\frac{\hat{\text{أ}}_2 - \text{ت}\,(\hat{\text{أ}}_2)}{\sqrt{\text{تبا}\,(\hat{\text{أ}}_2)}} = \frac{\hat{\text{أ}}_2 - \text{أ}_2}{\sqrt{\text{ع}^2_{\text{ق}} \big\backslash \text{مجـ}\, \text{س}'^2_2\, (1 - \text{ر}^2_{1،2})}} \quad (٣)$$

يخضع للتوزيع الطبيعى المعيارى، أما إذا كان $\sigma^2_{\text{ق}}$ غيرمعلوم ويستخدم $\sigma^2_{\text{ق}}$ بدلاً منه وكان حجم العينة المستخدم أقل من ٣٠ مفردة فإن الكميات (١)، (٢)، (٣) السابقة تخضع لتوزيع ت بدرجات حرية ن – ٣.

فى حالة إستخدام القيم الأصلية للمتغيرين س،ص، نلاحظ أن:

$$\text{مجـ}\, \text{س}'^2_1 = \text{مجـ}\, \text{س}^2_{1\text{ر}} - \frac{(\text{مجـ}\, \text{س}_{1\text{ر}})^2}{\text{ن}}$$

$$\text{مجـ}\, س_{٢}^{/٢} = \text{مجـ}\, س_{٢ر}^{٢} - \frac{(\text{مجـ}\, س_{٢ر})^{٢}}{ن}$$

$$\text{مجـ}\, س_{١}^{/} س_{٢}^{/} = \text{مجـ}\, س_{١ر}\, س_{٢ر} - \frac{\text{مجـ}\, س_{١ر} \times \text{مجـ}\, س_{٢ر}}{ن}$$

(٧-٢-٢-١) إختبار معنوية المعالم

أولاً: إختبار معنوية الثابت أ.

تصاغ مشكلة إختبار معنوية الثابت أ. على صورة الفرضين الآتيين:

H_0: **أ. = صفر** ← ويعنى أن خط الإنحدار بالمجتمع يمر بنقطة الأصل.

H_1: **أ. ≠ صفر** ← ويعنى أن خط الإنحدار بالمجتمع لا يمر بنقطة الأصل.

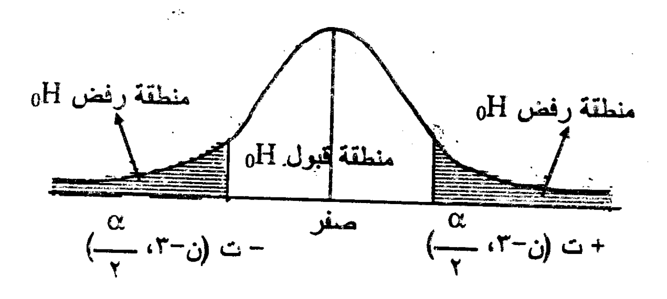
بفرض أن $\sigma^{٢}_{ى}$ غير معلومة وأن حجم العينة «ن» أقل من ٣٠ مفردة فإن الإختبار يجرى كما يلى:

١- نوجد قيمة ت المحسوبة، حيث:

$$\text{ت المحسوبة} = \frac{\hat{أ}_{.}}{ع_{\hat{أ}_{.}}}$$

$$= \frac{\hat{أ}_{.}}{\sqrt{\frac{ع^{٢}_{ق}}{ن} + \bar{س}_{١}^{٢} ع^{٢}_{\hat{أ}_{١}} + \bar{س}_{٢}^{٢} ع^{٢}_{\hat{أ}_{٢}} + ٢\bar{س}_{١}\bar{س}_{٢}\ \text{تغا}(\hat{أ}_{١}، \hat{أ}_{٢})}}$$

٢- نوجد قيمة ت الجدولية عند درجات الحرية ن − ٣ ولمستوى المعنوية $\frac{\alpha}{٢}$ (لأن الإختبار من جانبين فى هذه الحالة)،أى نوجد قيمة ت(ن-٣، $\frac{\alpha}{٢}$.) من جدول توزيع ت ونحدد بها منطقتى القبول والرفض لـ H_0



٣- بمقارنة قيمة ت المحسوبة بقيمة ت الجدولية، فإذا وقعت قيمة ت المحسوبة فى منطقة القبول نقبل الفرض العدمى H_0، أما إذا وقعت فى منطقة الرفض فنرفض H_0 ونقبل بالتالى H_1.

ثانياً: إختبار معنوية المعامل أ١

وتكون مشكلة إختبار أ١ على صورة الفرضين:

H_0: أ١ = صفر ← ويعنى أنه لاتوجد علاقة إنحدار معنويه بين ص، س١ بالمجتمع.

H_1: أ١ ≠ صفر ← ويعنى أنه توجد علاقة إنحدار معنويه بين ص، س١ بالمجتمع.

١- نحسب قيمة ت المحسوبة، حيث:

$$\text{ت المحسوبة} = \frac{\hat{\text{أ}}_1}{\text{ع}_{\hat{\text{أ}}_1}} = \frac{\hat{\text{أ}}_1}{\sqrt{\text{ع}^2_{\text{ق}} / \text{مجـ س}_1^2 \,(1 - \text{ر}^2_{1،2})}}$$

٢- من جدول توزيع ت نوجد القيمة ت $(\text{ن}-3، \frac{\alpha}{2})$ ونحدد بها منطقة القبول والرفض للفرض العدمى H_0 كما فى الشكل السابق.

٣- بمقارنة قيمة ت المحسوبة بقيمة ت الجدولية نقبل أو نرفض H_0.

ثالثاً: إختبار معنوية المعامل $أ_٢$

وبنفس طريقة إختبار معنوية $أ_١$ فإن المشكله تصاغ كما يلي:

H_0: $أ_٢$ = صفر ← ويعنى أنه لاتوجد علاقة إنحدار معنوية بين ض، $س_٢$ بالمجتمع.

H_1: $أ_٢$ ≠ صفر ← ويعنى أنه توجد علاقة إنحدار معنوية بين ص، $س_٢$ بالمجتمع.

١- نحسب قيمة ت المحسوبة، حيث:

$$ت_{المحسوبة} = \frac{\hat{أ}_٢}{ع_{\hat{أ}_٢}} = \frac{\hat{أ}_٢}{\sqrt{ع^٢_{ق} / مجـ س_٢^{٢/} (١ - ر^٢_{٢،١})}}$$

٢- يتم إيجاد القيمة ت (ن-٣، $\frac{\alpha}{٢}$) من جدول توزيع ت.

٣- وبمقارنة القيمة المحسوبة لـ ت بقيمتها الجدولية يتم قبول أو رفض الفرض العدمى H_0.

(٧-٢-٢-٢) إختبار معنوية العلاقة الخطية للإنحدار باستخدام إختبار ف.

فى هذه الحالة سوف يتم تعميم الطريقة التى أتبعت فى إختبار معنوية العلاقة الخطية للإنحدار فى حالة خط الإنحدار البسيط ص/س، ففى حالة خط الإنحدار المتعدد ص/$س_١$، $س_٢$ فإننا نجد أيضاً أن:

مجموع المربعات الكلى (م م ك) = مجـ $(ص_ر - \bar{ص})^٢$ = مجـ ص$^{/}$

وهذا المجموع ينقسم إلى مجموعين:

الأول: يرجع إلى الإنحدار أو العلاقة الخطية أى بسبب المتغيرين المستقلين س_1، س_2 ويسمى بمجموع مربعات الإنحدار (م م د)، وفى هذه الحالة فإن:

$$\text{م م د} = \text{مجـ}(\hat{\text{ص}}_{\text{ر}} - \bar{\text{ص}})^{2} = \hat{\text{أ}}_1\,\text{مجـ}\,\text{س}'_1\,\text{ص}' + \hat{\text{أ}}_2\,\text{مجـ}\,\text{س}'_2\,\text{ص}'$$

الثانى: يرجع إلى الأخطاء العشوائية ويسمى بمجموع مربعات الخطأ (م م خ)،

حيث:

$$\text{م م خ} = \text{م م ك} - \text{م م د}$$

$$= \text{مجـ}\,\text{ص}'^{2} - (\hat{\text{أ}}_1\,\text{مجـ}\,\text{س}'_1\,\text{ص}' + \hat{\text{أ}}_2\,\text{مجـ}\,\text{س}'_2\,\text{ص}')$$

وتتوقف قوة العلاقة بين المتغير التابع ص والمتغيرين المستقلين س_1،س_2 فى صورتها الخطية على تفسير التغيرات التى تحدث فى ص بسبب س_1،س_2. وبالتالى فإن نسبة تباين الإنحدار إلى تباين الخطأ العشوائى سوف تستخدم كمعيار للحكم على معنوية العلاقة الخطية للإنحدار بين ص، س_1،س_2 من عدمه.

ويجرى إختبار معنوية العلاقة الخطية للإنحدار باستخدام إختبار ف كما يلى:

H_0: علاقة إنحدار ص على س_1،س_2 بالمجتمع غير معنوية.

H_1: علاقة إنحدار ص على س_1،س_2 بالمجتمع معنوية.

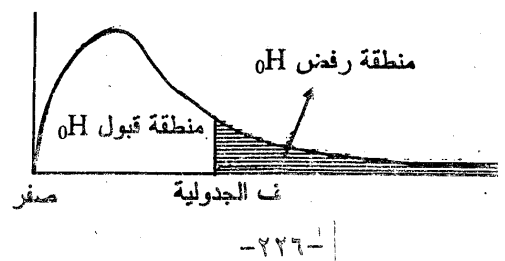
نلاحظ أن درجات حرية الإنحدار يقصد بها عدد المتغيرات المستقلة التى تؤثر على المتغير التابع فى نموذج الإنحدار وهى فى هذه الحالة

تساوى ٢ (حيث يوجد متغيران مستقلان، $س_١$، $س_٢$)، كما أن درجات حرية الخطأ عبارة عن عذد المشاهدات مطروحاً منها عدد معالم معادلة الإنحدار المجهولة والتى يتم تقديرها وهى تقديرات الثوابت $أ_٠$، $أ_١$، $أ_٢$ وبالتالى فإن درجات حرية الخطأ فى حالتنا هذه يساوى ن−٣.

ويكون جدول تحليل التباين على الصورة:

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	ف
الإنحدار	٢	مجـ $صَ'^٢ - \hat{أ}_١$ مجـ $س'_١ ص'$ + $\hat{أ}_٢$ مجـ $س'_٢ ص'$	مجـ $صَ'^٢ / ٢$	متوسط مربعات الإنحدار / متوسط مربعات الخطأ
الخطأ	ن−٣	مجـ $\hat{ق}_ر^٢$ = مجـ $ص'^٢ - \hat{أ}_١ \times$ مجـ $س'_١ ص' - \hat{أ}_٢$ مجـ $س'_٢ ص'$	مجـ $\hat{ق}_ر^٢$/ن−٣	
المجموع	ن−١	مجـ $ص'^٢$		

وقيمة ف هنا تتبع توزيع ف بدرجات حريه ٢، ن−٣. فبعد أن يتم حساب قيمة ف (آخر عمود بالجدول)، يتم إيجاد قيمة ف الجدولية عند درجتى الحرية ٢، ن−٣ ولمستوى المعنوية المطلوبة α، من جدول توزيع ف ونحدد بها منطقة القبول والرفض للفرض H_0 كما يتضح من الشكل التالى:



وبمقارنة قيمة ف المحسوبة بقيمة ف الجدولية يتم اتخاذ القرار بقبول أو رفض الفرض العدمى H_0.

(٧-٢-٢-٣) فترات الثقة لمعالم معادلة إنحدار ص/س١،س٢

يمكن تقدير حدى الثقة لثوابت معادلة الإنحدار أ.،أ١، أ٢ عند مستوى المعنوية ،α، على النحو التالى:

حدا الثقة للمعلمة أ. هما:

$$\hat{أ}_. \pm ت(ن-٣، \frac{\alpha}{٢}) \times ع_{\hat{أ}_.}$$

كما أن:

حدا الثقة للمعلمة أ١ هما:

$$\hat{أ}_١ \pm ت(ن-٣، \frac{\alpha}{٢}) \times ع_{\hat{أ}_١}$$

كما أن:

حدا الثقة للمعلمة أ٢ هما:

$$\hat{أ}_٢ \pm ت(ن-٣، \frac{\alpha}{٢}) \times ع_{\hat{أ}_٢}$$

حيث $ع_{\hat{أ}_.}$ ، $ع_{\hat{أ}_١}$ ، $ع_{\hat{أ}_٢}$ ،تمثل الأخطاء المعيارية للتقديرات $\hat{أ}_.$، $\hat{أ}_١$، $\hat{أ}_٢$، على الترتيب، ولهم نفس التعاريف السابقة.

مثال (٧-١٣)

فى دراسة لمعرفة العلاقة بين الطلب على القمح ($ص_{ر}$) وبين سعر الوحدة من القمح ($س_{١ر}$)، وسعر الوحدة من الأرز ($س_{٢ر}$) تم الحصول على البيانات التالية لعينة ٥ مشاهدات كما يلى:

الطلب على القمح ($ص_{ر}$)	٢	٣	٧	٨	١٠
سعر القمح ($س_{١ر}$)	٥	٤	٣	٢	١
سعر الأرز($س_{٢ر}$)	١	٣	٤	٥	٧

والمطلوب:

١- تقدير معادلة الإنحدار المتعدد للمتغير التابع $ص_{ر}$ على كل من المتغيرين المستقلين $س_{١ر}$ $س_{٢ر}$ بفرض أنها خطية.

٢- التنبؤ بالطلب المتوقع على القمح ($ص_{ر}$) عندما يكون سعر الوحدة من القمح ($س_{١ر}$) يساوى ٢,٥ جنيها وسعر الوحدة من الأرز ($س_{٢ر}$) يساوى ٦ جنيهات.

٣- إيجاد معامل التحديد واشرح معناه.

٤- إختبار معنوية معاملات الإنحدار $أ_{١}$، $أ_{٢}$.

٥- إختبار معنوية العلاقة الخطية للإنحدار مستخدماً إختبار ف.

٦- إيجاد حدى الثقة لمعامل إنحدار ص على $س_{١}$ (أى $أ_{١}$).

(إستخدم درجة الثقه ٩٩٪).

الحل:

نحسب أولاً الوسط الحسابى لكل من ص، $س_{١}$، $س_{٢}$، حيث:

$\bar{ص} = \frac{\text{مجـ ص}}{ن} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$ ، $\bar{س}_{١} = \frac{\text{مجـ س}_{١}}{ن} = \frac{١٥}{٥} = ٣$ ، $\bar{س}_{٢} = \frac{\text{مجـ س}_{٢}}{ن} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$

وحيث أن جميع الأوساط الحسابية أعداد صحيحة فيفضل إستخدام

طريقة إنحرافات القيم عن وسطها الحسابى، لهذا ننظم الجدول التالى:

ص١	س١	س٢	ص − $\bar{ص}$ = ص/	س١ − $\bar{س}_{١}$ = س/١	س٢ − $\bar{س}_{٢}$ = س/٢	س/١ × ص/	س/٢ × ص/	س/١ × س/٢	ص/٢	س/٢١	س/٢٢
٢	٥	١	−٤	٢	−٣	−٨	١٢	−٦	١٦	٤	٩
٣	٤	٣	−٣	١	−١	−٣	٣	−١	٩	١	١
٧	٣	٤	١	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	١	صفر	صفر
٨	٢	٥	٢	−١	١	−٢	٢	−١	٤	١	١
١٠	١	٧	٤	−٢	٣	−٨	١٢	−٦	١٦	٤	٩
٣٠	١٥	٢٠				−٢١	٢٩	−١٤	٤٦	١٠	٢٠

١ – تقدير معادلة إنحدار ص/س١،س٢ هى :

$\hat{ص}_{ر} = \hat{أ}_{.} + \hat{أ}_{١} س_{١ر} + \hat{أ}_{٢} س_{٢ر}$

يتم الحصول على التقديرين $\hat{أ}_{١}$ ، $\hat{أ}_{٢}$ من المعادلتين الآتيتين:

$\text{مجـ } س/_{١} ص/ = \hat{أ}_{١} \text{ مجـ } س/_{١}{}^{٢} + \hat{أ}_{٢} \text{ مجـ } س/_{١} س/_{٢}$

$\text{مجـ } س/_{٢} ص/ = \hat{أ}_{١} \text{ مجـ } س/_{١} س/_{٢} + \hat{أ}_{٢} \text{ مجـ } س/_{٢}{}^{٢}$

بالتعويض عن المجاميع بقيمها ينتج أن:

$-٢١ = ١٠ \hat{أ}_{١} - ١٤ \hat{أ}_{٢}$

$٩ = -١٤ \hat{أ}_{١} + ٢٠ \hat{أ}_{٢}$

ويمكن حل المعادلتين السابقتين باستخدام المحددات للحصول على قيم التقديرات $\hat{أ}_1$، $\hat{أ}_2$ على النحو التالى:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١٠ & -١٤ \\ -١٤ & ٢٠ \end{vmatrix} = ٢٠٠ - ١٩٦ = ٤$$

$$\Delta_{\hat{أ}_1} = \begin{vmatrix} -٢١ & -١٤ \\ ٢٩ & ٢٠ \end{vmatrix} = -٤٢٠ + ٤٠٦ = -١٤$$

$$\Delta_{\hat{أ}_2} = \begin{vmatrix} ١٠ & -٢١ \\ ١٤ & ٢٩ \end{vmatrix} = ٢٩٠ - ٢٩٤ = -٤$$

$$\hat{أ}_1 = \frac{\Delta_{\hat{أ}_1}}{\Delta} = \frac{-١٤}{٤} = -٣,٥$$

$$\hat{أ}_2 = \frac{\Delta_{\hat{أ}_2}}{\Delta} = \frac{-٤}{٤} = -١$$

للحصول على التقدير $\hat{أ}_0$، نعلم أن:

$$\hat{أ}_0 = \bar{ص} - \hat{أ}_1 \bar{س}_1 - \hat{أ}_2 \bar{س}_2$$

$$= ٦ - (-٣,٥)(٣) - (-١)(٤) = ٢٠,٥$$

∴ معادلة إنحدار ص/س١، س٢ هى:

$$\hat{ص}_ر = ٢٠,٥ - ٣,٥ \, س_{١ر} - س_{٢ر}$$

٢- للتنبؤ بقيمة ص عندما $س_1 = ٢,٥$، $س_2 = ٦$، فإن

$$\hat{ص}_ر \text{ (المتوقعة)} = ٢٠,٥ - ٣,٥ \,(٢,٥) - ٦ = ٥,٧٥.$$

٣- معامل التحديد $(ر^2)$

$$ر^2 = \frac{\hat{أ}_1 \, مجـ \, س'_1 \, ص' + \hat{أ}_2 \, مجـ \, س'_2 \, ص'}{مجـ \, ص'^2}$$

$$= \frac{-٣,٥ \,(-٢١) + (-١)\,(٢٩)}{٤٦} = ٠,٩٦$$

وهذه النتيجة تعنى أن ٠,٩٦ من التغيرات الكلية التى تحدث فى الطلب على القمح (ص) ترجع إلى التغير فى سعر القمح $(س_1)$ وسعر الأرز $(س_2)$، فى حين أن ٠,٠٤ فقط من هذه التغيرات الكلية تحدث بسبب العوامل العشوائية الأخرى.

٤- إختبار معنوية الثوابت $أ_1$، $أ_2$

أولاً: إختبار معنوية $أ_1$

H_0: $أ_1 =$ صفر ← لاتوجد علاقة إنحدار معنويه بين ص، $س_1$.

H_1: $أ_1 \neq$ صفر ← توجد علاقة إنحدار معنويه بين ص، $س_1$.

$$\text{ت المحسوبة} = \frac{\hat{أ}_1}{ع_{\hat{أ}_1}}$$

حيث:

$$ع_{\hat{أ}_1} = \sqrt{\frac{ع^2_ى}{مجـ \, س'^2_1 \,(1 - ر^2_{1،2})}}$$

$$ر^2_{1،2} = \frac{(مجـ \, س'_1 \, س'_2)^2}{مجـ \, س'^2_1 \times مجـ \, س'^2_2} = \frac{(-١٤)^2}{١٠ \times ٢٠} = ٠,٩٨$$

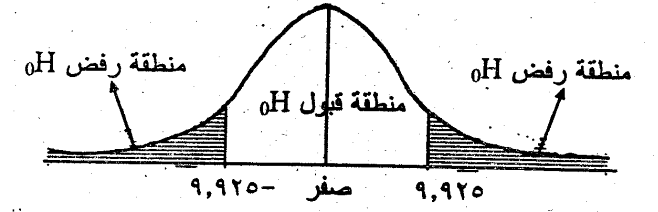
$$ع^2_ى = \frac{مجـ \, ص'^2 - أ_1 \, مجـ \, س'_1 \, ص' - أ_2 \, مجـ \, س'_2 \, ص'}{ن-٣}$$

$$= \frac{٤٦ - (-٣,٥)(-٢١) - (-١)(٢٩)}{٢} = ٠,٧٥$$

$$ع_{\hat{أ}_١} = \sqrt{\frac{٠,٧٥}{١٠(١-٠,٩٨)}} = ١,٩٤$$

$$ت\ المحسوبة = \frac{-٣,٥}{١,٩٤} = -١,٨$$

ثم نوجد قيمة ت عند درجات الحرية (٥-٣) = ٢ ولمستوى المعنويه $\frac{٠,٠١}{٢}$ = ٠,٠٠٥، من جدول توزيع ت، فنجد أن ت (٢،٠,٠٠٥)=٩,٩٢٥



ثانياً: إختبار معنوية أ٢

H_0 : أ٢ = صفر

H_1: أ٢ ≠ صفر

$$ت\ المحسوبة = \frac{\hat{أ}_٢}{ع_{\hat{أ}_٢}}$$

$$ع_{\hat{أ}_٢} = \sqrt{\frac{ع^٢_ق}{مجـ س^٢_٢ (١-ر^٢_{٢،١})}} = \sqrt{\frac{٠,٧٥}{٢٠ (١-٠,٩٨)}} = ١,٣٧.$$

$$\text{ت المحسوبة} = \frac{-1}{1,37} = -0,73.$$

وحيث أن هذه القيمة تقع أيضاً فى منطقة القبـول، فنقبل الفرض H_0 والذى يقضى أيضاً بعدم وجود علاقة إنحدار معنويـة بيـن ص، $س_2$ بمجتمـع الدراسة.

٥- إختبار معنوية العلاقة الخطية

H_0 : لا توجد علاقة إنحدار معنوية بين ص، $س_1$، $س_2$ بالمجتمع.

H_1 : توجد علاقة إنحدار معنوية بين ص، $س_1$، $س_2$ بالمجتمع.

م م د = $\hat{أ}_1$ مجـ $س'_1$ ص' + $\hat{أ}_2$ مجـ $س'_2$ ص'

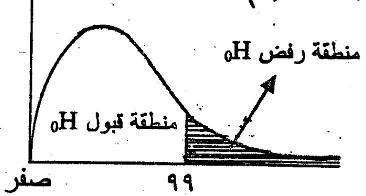
= (-٣,٥) (-٢١) + (-١) (٢٩) = ٤٤,٥

م م خ = م م ك - م م د = ٤٦ - ٤٤,٥ = ١,٥.

ويأخذ جدول تحليل التباين الشكل التالى:

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	ف
الإنحدار	٢	٤٤,٥	٢٢,٢٥	٢٩,٦٦
الخطأ	٢	١,٥	٠,٧٥	
الكلى	٤	٤٦		

فكما يتضح من الجدول فإن قيمة ف المحسوبة = ٢٩,٦٦، ولكن قيمة ف الجدولية = ف (٢، ٢، ٠,٠١) = ٩٩.



وحيث أن قيمة ف المحسوبة < قيمة ف الجدولية أى تقع في منطقة قبول H_0، لذلك نقبل H_0، وعليه لا توجد علاقة إنحدار معنوية بين ص، س١، س٢ بمجتمع الدراسة. وهذه النتيجة تتفق مع النتيجة التى أظهرها إختبار معنوية كل من أ١، أ٢ بإستخدام إختبار ت.

٦- حدود الثقة لمعامل إنحدار ص/س١

حدا الثقة للمعلمة أ١ هما:

$$أ_١ \pm ت\ (ن-٣\ ،\ \frac{\alpha}{٢}) \times ع_{أ_١}$$

$$= -٣,٥ \pm ت\ (٢،\ ٠,٠٠٥) \times ١,٩٤$$

$$= -٣,٥ \pm ٩,٩٢٥\ (١,٩٤)$$

$$= -٣,٥ \pm ١٩,٢٥$$

الحد الأدنى للثقة = -٣,٥ - ١٩,٢٥ = -٢٢,٧٥

الحد الأعلى للثقة = -٣,٥ + ١٩,٢٥ = ١٥,٧٥

$\therefore$ ح (-٢٢,٧٥ ≤ أ١ ≤ ١٥,٧٥) = ١-α = ٩٩٪.

مثال (٧-١٣)

إذا كانت كمية المبيعات اليومية من إحدى السلع (ص) تعتمد على سعر السلعة (س١) والمنفق على مصاريف الدعاية والإعلان على السلعة (س٢)، وأخذت عينة من ٦ مشاهدات عن ص، س١، س٢ وكانت كما يلى:

حجم المبيعات من السلعة (ص)	١٠	٨	٧	٤	٦	٥
سعر الوحدة من السلعة (س١)	١	٢	٣	٥	٢	٤
مصاريف الدعاية والإعلان (س٢)	٤	٣	٣	٢	١	١

والمطلوب:

١- تقدير معادلة إنحدار ص/س١، س٢ بفرض أنها خطية.

٢- إختبار معنوية ثوابت معادلة الإنحدار.

٣- إيجاد معامل التحديد.

٤- إختبار معنوية العلاقة الخطية للإنحدار مستخدماً إختبار ف.

الحل:

نحسب أولاً الأوساط الحسابية للمتغيرات ص، س١، س٢

$$\bar{ص} = \frac{٤٠}{٦} = ٦,٦٧ ، \quad \bar{س}_١ = \frac{١٧}{٦} = ٢,٨٣ ، \quad \bar{س}_٢ = \frac{١٤}{٦} = ٢,٣٣$$

وحيث أن الأوساط الحسابية تحتوى على كسور فانه يفضل إستخدام صيغ القيم الأصلية، ولهذا نكون الجدول التالى:

ص	س١	س٢	س١ص	س٢ص	س١س٢	ص²	س١²	س٢²
١٠	١	٤	١٠	٤٠	٤	١٠٠	١	١٦
٨	٢	٣	١٦	٢٤	٦	٦٤	٤	٩
٧	٣	٣	٢١	٢١	٩	٤٩	٩	٩
٤	٥	٢	٢٠	٨	١٠	١٦	٢٥	٤
٦	٢	١	١٢	٦	٢	٣٦	٤	١
٥	٤	١	٢٠	٥	٤	٢٥	١٦	١
٤٠	١٧	١٤	٩٩	١٠٤	٣٥	٢٩٠	٥٩	٤٠

١- تقدير معادلة إنحدار ص/س١، س٢ هى:

$$\hat{ص}_ر = \hat{أ}_٠ + \hat{أ}_١ س_{١ر} + \hat{أ}_٢ س_{٢ر}$$

يتم الحصول على التقديرات أ̂$_{٠}$، أ̂$_{١}$، أ̂$_{٢}$ بحل المعادلات الطبيعية الآتية:

مجـ س$_{١}$ص = أ̂$_{٠}$ مجـ س$_{١}$ + أ̂$_{١}$ مجـ س$_{١}^{٢}$ + أ̂$_{٢}$ مجـ س$_{١}$س$_{٢}$

مجـ س$_{٢}$ص = أ̂$_{٠}$ مجـ س$_{٢}$ + أ̂$_{١}$ مجـ س$_{١}$س$_{٢}$ + أ̂$_{٢}$ مجـ س$_{٢}^{٢}$

مجـ ص = ن أ̂$_{٠}$ + أ̂$_{١}$ مجـ س$_{١}$ + أ̂$_{٢}$ مجـ س$_{٢}$

٩٩ = ١٧ أ̂$_{٠}$ + ٥٩ أ̂$_{١}$ + ٣٥ أ̂$_{٢}$

١٠٤ = ١٤ أ̂$_{٠}$ + ٣٥ أ̂$_{١}$ + ٤٠ أ̂$_{٢}$

٤٠ = ٦ أ̂$_{٠}$ + ١٧ أ̂$_{١}$ + ١٤ أ̂$_{٢}$

بحل المعادلات الثلاث السابقة بإستخدام طريقة المحددات ينتج أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١٧ & ٥٩ & ٣٥ \\ ١٤ & ٣٥ & ٤٠ \\ ٦ & ١٧ & ١٤ \end{vmatrix} = ١٧ \begin{vmatrix} ٣٥ & ٤٠ \\ ١٧ & ١٤ \end{vmatrix} - ١٤ \begin{vmatrix} ٥٩ & ٣٥ \\ ١٧ & ١٤ \end{vmatrix} + ٦ \begin{vmatrix} ٥٩ & ٣٥ \\ ٣٥ & ٤٠ \end{vmatrix}$$

= ١٧ (٤٩٠ - ٦٨٠) -١٤ (٨٢٦-٥٩٥) +٦ (٢٣٦٠ - ١٢٢٥) = ٣٤٦

$$\Delta_{\hat{أ}_{١}} = \begin{vmatrix} ٩٩ & ٥٩ & ٣٥ \\ ١٠٤ & ٣٥ & ٤٠ \\ ٤٠ & ١٧ & ١٤ \end{vmatrix} = ٩٩ \begin{vmatrix} ٣٥ & ٤٠ \\ ١٧ & ١٤ \end{vmatrix} - ١٠٤ \begin{vmatrix} ٥٩ & ٣٥ \\ ١٧ & ١٤ \end{vmatrix} + ٤٠ \begin{vmatrix} ٥٩ & ٣٥ \\ ٣٥ & ٤٠ \end{vmatrix}$$

= ٩٩ (٤٩٠ - ٦٨٠) -١٠٤(٨٢٦-٥٩٥) +٤٠ (٢٣٦٠-١٢٢٥)=٢٥٦٦

$$\Delta_{\hat{أ}_{١}} = \begin{vmatrix} ١٧ & ٩٩ & ٣٥ \\ ١٤ & ١٠٤ & ٤٠ \\ ٦ & ٤٠ & ١٤ \end{vmatrix} = ١٧ \begin{vmatrix} ١٠٤ & ٤٠ \\ ٤٠ & ١٤ \end{vmatrix} - ١٤ \begin{vmatrix} ٩٩ & ٣٥ \\ ٤٠ & ١٤ \end{vmatrix} + ٦ \begin{vmatrix} ٩٩ & ٣٥ \\ ١٠٤ & ٤٠ \end{vmatrix}$$

= ١٧ (١٤٥٦-١٦٠٠)-١٤(١٣٨٦-١٤٠٠)+٦(٣٩٦٠-٣٦٤٠) =-٣٣٢

$$\Delta_{\text{أ}_٢} = \begin{vmatrix} ١٧ & ٥٩ & ٩٩ \\ ١٤ & ٣٥ & ١٠٤ \\ ٦ & ١٧ & ٤٠ \end{vmatrix} = ١٧ \begin{vmatrix} ٣٥ & ١٠٤ \\ ١٧ & ٤٠ \end{vmatrix} - ١٤ \begin{vmatrix} ٥٩ & ٩٩ \\ ١٧ & ٤٠ \end{vmatrix} + ٦ \begin{vmatrix} ٥٩ & ٩٩ \\ ٣٥ & ١٠٤ \end{vmatrix}$$

$$= ١٧\,(١٤٠٠-١٧٦٨) - ١٤\,(٢٣٦٠-١٦٨٣) + ٦\,(٦١٣٦-٣٤٦٥) = ٢٩٢$$

$$\text{قيمة أ}_. = \frac{\Delta_{\text{أ}_.}}{\Delta} = \frac{٢٥٦٦}{٣٤٦} = ٧,٤٢$$

$$\text{قيمة أ}_١ = \frac{\Delta_{\text{أ}_١}}{\Delta} = \frac{-٣٣٢}{٣٤٦} = -٠,٩٦$$

$$\text{قيمة أ}_٢ = \frac{\Delta_{\text{أ}_٢}}{\Delta} = \frac{٢٩٢}{٣٤٦} = ٠,٨٤$$

إذن:

معادلة إنحدار ص/س₁، س₂ المقدره من العينه هى:

$$\hat{\text{ص}}_\text{ر} = ٧,٤٢ - ٠,٩٦\ \text{س}_{١\text{ر}} + ٠,٨٤\ \text{س}_{٢\text{ر}}$$.

٢- لإختبار معنوية الثوابت أ.، أ₁، أ₂، نعلم أن:

$$\text{مجـ ص}'^{٢} = \text{مجـ ص}^{٢} - \frac{(\text{مجـ ص})^{٢}}{\text{ن}} = ٢٩٠ - \frac{(٤٠)^{٢}}{٦} = ٢٣,٣٣$$

$$\text{مجـ س}'^{٢}_{١} = \text{مجـ س}^{٢}_{١} - \frac{(\text{مجـ س}_١)^{٢}}{\text{ن}} = ٩٥ - \frac{(١٧)^{٢}}{٦} = ١٠,٨٣$$

$$\text{مجـ س}'^{٢}_{٢} = \text{مجـ س}^{٢}_{٢} - \frac{(\text{مجـ س}_٢)^{٢}}{\text{ن}} = ٤٠ - \frac{(١٤)^{٢}}{٦} = ٧,٣٣$$

$$\text{مجـ س}'_{١}\text{ص}' = \text{مجـ س}_{١}\text{ص} - \frac{\text{مجـ س}_{١} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن}} = ٩٩ - \frac{١٧ \times ٤٠}{٦} = -١٤,٣٣$$

$$\text{مجـ س}'_{٢}\text{ص}' = \text{مجـ س}_{٢}\text{ص} - \frac{\text{مجـ س}_{٢} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن}} = ١٠٤ - \frac{١٤ \times ٤٠}{٦} = ١٠,٦٧$$

$$\text{مجـ س}'_{١}\text{س}'_{٢} = \text{مجـ س}_{١}\text{س}_{٢} - \frac{\text{مجـ س}_{١} \times \text{مجـ س}_{٢}}{\text{ن}} = ٣٥ - \frac{١٧ \times ٤٠}{٦} = -٤,٦٧$$

إذن:

$$\text{ع}^{٢}_{\text{ق}} = \frac{\text{مجـ ص}'^{٢} - \text{أ}_{١}\,\text{مجـ س}'_{١}\text{ص}' - \text{أ}_{٢}\,\text{مجـ س}'_{٢}\text{ص}'}{\text{ن} - ٣}$$

$$= \frac{٢٣,٣٣ - (-٠,٩٦)(-١٤,٣٣) - ٠,٨٤\,(١٠,٦٧)}{٣} = ٠,٢$$

مربع معامل الإرتباط بين $\text{س}_{١}$،$\text{س}_{٢}$ هو:

$$\text{ر}^{٢}_{٢،١} = \frac{(\text{مجـ س}'_{١}\text{س}'_{٢})^{٢}}{\text{مجـ س}'^{٢}_{١} \times \text{مجـ س}'^{٢}_{٢}} = \frac{(-٤,٦٧)^{٢}}{١٠,٨٣ \times ٧,٣٣} = ٠,٢٧$$

الخطأ المعياري للتقدير $\text{أ}_{١}$ هو:

$$\text{ع}_{\text{أ}_{١}} = \sqrt{\frac{\text{ع}^{٢}_{\text{ق}}}{\text{مجـ س}'^{٢}_{١}\,(١ - \text{ر}^{٢}_{٢،١})}} = \sqrt{\frac{٠,٢}{١٠,٨٣\,(١ - ٠,٢٧)}} = ٠,١٦$$

كما أن:

$$\text{ع}_{\text{أ}_{٢}} = \sqrt{\frac{\text{ع}^{٢}_{\text{ق}}}{\text{مجـ س}'^{٢}_{٢}\,(١ - \text{ر}^{٢}_{٢،١})}} = \sqrt{\frac{٠,٢}{٧,٣٣ \times ٠,٧٣}} = ٠,١٩$$

لإيجاد $\text{ع}_{\text{أ}}$ نوجد أولاً تغا ($\text{أ}_{١}$، $\text{أ}_{٢}$) حيث:

$$تغا(\hat{أ}_1، \hat{أ}_2) = ع_{ق}^{2} \left[\frac{- مجـ س_1^{/} س_2^{/}}{مجـ س_1^{/2} مجـ س_2^{/2} - (مجـ س_1^{/} س_2^{/})^2} \right]$$

$$= ٠٫٢ \left[\frac{-(٤٫٦٧)}{١٠٫٨٣ \times ٧٫٣٣ - (٤٫٦٧)^2} \right] = -٠٫٠١٦$$

$$ع_{\hat{أ}_.} = \sqrt{\frac{ع_{ق}^{2}}{ن} + \bar{س}_1^{2} ع_{\hat{أ}_1}^{2} + \bar{س}_2^{2} ع_{\hat{أ}_2}^{2} + ٢ \bar{س}_1 \bar{س}_2 تغا(\hat{أ}_1، \hat{أ}_2)}$$

$$= \sqrt{\frac{٠٫٢}{٦} + ٨٫٠٠٩(٠٫١٦)^2 + ٥٫٤٢٩(٠٫١٩)^2 + ٢(٢٫٨٣)(٢٫٣٣)(-٠٫٠١٦)}$$

أ- إختبار معنوية الثابت أ.

H_0 : أ. = صفر

H_1 : أ. ≠ صفر

$$قيمة\ ت\ المحسوبة = \frac{\hat{أ}_.}{ع_{\hat{أ}_.}} = \frac{٧٫٤٢}{٠٫٨} = ٩٫٢٨$$

بينما قيمة ت (٣ ، ٠٫٠٢٥) = ٣٫١٨٢

وحيث أن قيمة ت المحسوبة > قيمة ت الجدولية، أى تقع فى منطقة الرفض، فنرفض H_0 ونقبل H_1، أى نقبل الفرض القائل بأن خط إنحدار ص/س$_1$، س$_2$ بالمجتمع يبتعد عن نقطة الأصل.

ب- إختبار معنوية المعامل أ$_1$

H_0 : أ$_1$ = صفر

H_1 : أ$_1$ ≠ صفر

$$قيمة\ ت\ المحسوبة = \frac{\hat{أ}_1}{ع_{\hat{أ}_1}} = \frac{-٠٫٩٦}{٠٫١٦} = -٦$$

وهى تقـع أيضـا فـى منطقـة رفض الفرض العدمـى H_0 وبالتـالى نقبـل H_1،
وعلى ذلك فتوجد علاقة إنحدار معنوية بين ص، س١ بالمجتمع.

جـ- إختبار معنوية المعامل أ٢

H_0 : أ٢ = صفر

H_1 : أ٢ ≠ صفر

$$\text{قيمة ت المحسوبة} = \frac{\hat{أ}_2}{ع_{\hat{أ}_2}} = \frac{0.84}{0.19} = 4.42$$

وبمقارنة هذه القيمة بالقيمة الجدولية ٣,١٨٢ نرفض H_0 ونقبـل H_1،
أى أن هناك علاقة إنحدار معنوية بين ص ، س٢ بالمجتمع.

$$\text{٣- معامل التحديد} = ر^2 = \frac{\hat{أ}_1 \text{ مجـ } س_1^/ ص^/ + \hat{أ}_2 \text{ مجـ } س_2^/ ص^/}{\text{مجـ } ص^{/2}}$$

$$= \frac{-0.96(-14.33) + 0.84\ (10.67)}{23.33} = 0.97$$

٤- إختبار معنوية العلاقة الخطية للإنحدار: حيث يكون فرضا الإختبار كمـا يلى:

H_0 : إنحدار ص/س١،س٢ بالمجتمع غير معنوى.

H_1 : إنحدار ص/س١،س٢ بالمجتمع معنوى.

م م ك = مجـ $ص^{/2}$ = ٢٣,٣٣

م م د = أ١ مجـ س/١ ص/ + أ٢ مجـ س/٢ ص/

= -٠,٩٦ (-١٤,٣٣) + ٠,٨٤ (١٠,٦٧) = ٢٢,٧٢

م م خ = م م ك - م م د = ٢٣,٣٣ - ٢٢,٧٢ = ٠,٦١

ويتم تكوين جدول تحليل التباين على الصورة:

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	ف
الإنحدار	٢	٢٢,٧٢	١١,٣٦	٥٥,٩٦
الخطأ	٣	٠,٦١	٠,٢٠٣	
المجموع	٥			

وحيث أن قيمة ف عند درجتي الحرية ٣,٢ ومستوى المعنوية ٠,٠٥ تساوي ٩,٥٥، وكما هو واضح فإن قيمة ف المحسوبة أكبر بكثير من قيمة ف الجدولية، لذلك يرفض الفرض H_0 ويقبل الفرض H_1، ولهذا فإن علاقة إنحدار ص على كل من س١ ، س٢ علاقة معنوية.

(٧ - ٣) الإرتباط المتعدد والجزئي

Multiple & Partial Correlation

درسنا في الجزء السابق أن المتغير التابع ص يتأثر بعدد من المتغيرات المستقلة س١،س٢،......، سن، وقد يكون تأثير كل متغير مستقل على المتغير التابع مستقلاً عن تأثير المتغيرات المستقلة الأخرى أو مرتبطاً بتأثير متغير مستقل آخر أو عدة متغيرات مستقلة أخرى.

فإذا أردنا قياس الإرتباط بين المتغير التابع ومجموعة المتغيرات المستقلة مجتمعة فيستخدم لذلك معامل الإرتباط المتعدد Multiple Correlation Coefficient. أما إذا رغبنا فى قياس العلاقة بين المتغير التابع وأحد المتغيرات المستقلة فقط بفرض ثبات المتغيرات المستقلة الأخرى (أى بحذف تأثير المتغيرات المستقلة الأخرى وجعلها محايدة) فيستخدم لذلك معامل الإرتباط الجزئى Partial Correlation Coefficient.

(٧-٣-١) معامل الإرتباط المتعدد

بفرض أن هناك متغيرين مستقلين $س_{١}$،$س_{٢}$ يؤثران معاً بطريقة خطية على المتغير التابع ص، فإن معامل الإرتباط المتعدد - والذى يبين درجة تأثير المتغيرين المستقلين معاً على المتغير التابع - سوف نرمز له بالرمز $ر_{ص، س_{١}، س_{٢}}$ يحسب كما يلى:

١- يتم تقدير خط الإنحدار المتعدد لـ ص على $س_{١}$ ، $س_{٢}$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى - كما أوضحنا فى الجزء السابق - على الصورة:

$$\hat{ص}_{ر} = \hat{أ}_{٠} + \hat{أ}_{١} س_{١} + \hat{أ}_{٢} س_{٢}$$

٢- يحسب تباين الخطأ العشوائى ،$ع^{٢}_{ق}$، والذى يحسب فى هذه الحاله كالآتى:

أ- بإستخدام صيغة إنحرافات القيم عن وسطها الحسابى، فإن:

$$ع^{٢}_{ق} = \frac{مجـ ص'^{٢} - \hat{أ}_{١} مجـ س'_{١} ص' - \hat{أ}_{٢} مجـ س'_{٢} ص'}{ن}$$

أو

ب- باستخدام صيغة القيم الأصلية، فإن:

$$\text{ع}^2_{\text{ق}} = \frac{\text{مجـ ص}^2 - \text{أ}_1 \ \text{مجـ س}_1 \text{ص} - \text{أ}_2 \ \text{مجـ س}_2 \text{ص} - \text{أ} \ . \ \text{مجـ ص}}{\text{ن}}$$

تتم القسمة فى هذه الحالة على ن (بينما تتم القسمة على ن-٣ عند حساب $\text{ع}^2_{\text{ق}}$ كما فى الجزء السابق إذا كانت $\text{ع}^2_{\text{ق}}$ سوف تستخدم فى إختبار معنوية معالم معادلة الإنحدار أو تقدير حدى الثقة لها).

٣- يحسب معامل الإرتباط المتعدد $\text{ر}_{\text{ص، س}_1\text{، س}_2}$ كما يلى:

$$\text{ر}_{\text{ص، س}_1\text{، س}_2} = \sqrt{1 - \frac{\text{ع}^2_{\text{ق}}}{\text{ع}^2_{\text{ص}}}}$$

حيث:

$$\text{ع}^2_{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}'^2}{\text{ن}} = \frac{\text{مجـ ص}^2 - \frac{(\text{مجـ ص})^2}{\text{ن}}}{\text{ن}}$$

وبالطبع إذا اقتربت قيمة معامل الإرتباط المتعدد من الواحد الصحيح دل ذلك على قوة العلاقة بين المتغيرين المستقلين معاً والمتغير التابع، والعكس، إذا إقتربت قيمة معامل الإرتباط المتعدد من الصفر دل ذلك على ضعف العلاقة بين المتغيرين المستقلين معاً والمتغير التابع، وإذا كانت قيمة معامل الإرتباط المتعدد مساوية للواحد الصحيح فيعنى ذلك أن العلاقه تامه بين المتغيرين المستقلين والمتغير التابع بحيث أن جميع نقط الإنتشار سوف تقع تماماً على خط الإنحدار دون أى إنحراف عنه.

وجدير بالذكر أننا لا نهتم بإشارة معامل الإرتباط المتعدد ولكن نهتم فقط بقيمته، لأنه قد يحدث ويؤثر أحد المتغيرين المستقلين تأثيرا عكسياً على المتغير التابع فى حين يؤثر المتغير المستقل الآخر تأثيرا طردياً وبالتالى تصبح إشارة معامل الإرتباط فى هذه الحالة ليس لها دلالة معينة.

(٧-٣-٢) معامل الإرتباط الجزئى

إذا كان معامل الإرتباط المتعدد -كما رأينا- يقيس العلاقة بين المتغيرات المستقله مجتمعه والمتغير التابع، فإن معامل الإرتباط الجزئى يقيس العلاقة بين المتغير التابع وأحد (أو بعض) المتغيرات المستقلة فقط مع ثبات تأثير بقية المتغيرات المستقلة الأخرى وجعلها محايدة.

فإذا إعتبرنا العلاقة الخطية بين المتغير التابع ص والمتغيرين المستقلين $س_١$، $س_٢$ فإن معامل الإرتباط الجزئى بين المتغير التابع ص والمتغير المستقل $س_١$ بفرض ثبات المتغير المستقل الآخر $س_٢$ (أى ستكون مفردات المتغير $س_٢$ لها جميعاً نفس القيمة بحيث يظهر الإرتباط فقط بين المتغيرين ص،$س_١$) والذى نرمز له بالرمز $ر'_{ص،س_١،س_٢}$ يحسب كما يلى:

$$ر'_{ص،س_١،س_٢} = \frac{ر_{ص،س_١} - ر_{ص،س_٢} \times ر_{س_١،س_٢}}{\sqrt{\left(١ - ر^٢_{ص،س_٢}\right)\left(١ - ر^٢_{س_١،س_٢}\right)}}$$

حيث : $ر_{ص،س_١}$ هو معامل الإرتباط البسيط بين ص، $س_١$

$ر_{ص،س_٢}$ هو معامل الإرتباط البسيط بين ص، $س_٢$

$ر_{س_١،س_٢}$ هو معامل الإرتباط البسيط بين $س_١$، $س_٢$

ويشترط لتطبيق هذه الصيغه أن $\text{ر}_{\text{ص،س}_1} \neq +1$،

$\text{ر}_{\text{س}_1\text{،س}_2} \neq +1$، وهذا شرط منطقى لأنه إذا كانت العلاقه تامه بين المتغيرين ص، س٢ فلا داعى إذن للمتغير س١، وإذا كانت العلاقـه تامـه بيـن المتغيرين س١، س٢ فلا داعى إذن للمتغير ص.

وبالمثل، فإن معامل الإرتباط الجزئى بين المتغير التابع ص والمتغير المستقل س٢ مع ثبات المتغير المستقل س١ هو:

$$\text{ر}'_{\text{ص،س}_2\text{.س}_1} = \frac{\text{ر}_{\text{ص،س}_2} - \text{ر}_{\text{ص،س}_1} \times \text{ر}_{\text{س}_1\text{،س}_2}}{\sqrt{\left(1-\text{ر}^2_{\text{ص،س}_1}\right)\left(1-\text{ر}^2_{\text{س}_1\text{،س}_2}\right)}}$$

بشرط أن $\text{ر}_{\text{ص،س}_1} \neq +1$، $\text{ر}_{\text{س}_1\text{،س}_2} \neq +1$

ويمكن تعميم العلاقة السابقة، فإذا كان هنـاك ثلاثـة متغيرات مستقله س١، س٢، س٣ يؤثرون معاً على المتغير التـابع ص، وأردنـا حسـاب معـامل الإرتباط الجزئى بين المتغير التابع ص وأحد المتغيرات المستقلة مـع ثبـات المتغيرين المستقلين الآخرين، فإننـا نحسـب أولاً معـاملات الإرتبـاط البسـيطة بيـن أزواج المتغيرات ثـم نحسـب معـاملات الإرتبـاط الجزئـى لمتغيرين مـع تثبيت المتغير الثالث ثم نستنتج المعامل المطلوب. فإذا رمزنا لمعامل الإرتباط الجزئى بين ص، س١ مع تثبيت س٢، س٣ مثلاً بـالرمز $\text{ر}'_{\text{ص،س}_1\text{.س}_2\text{س}_3}$،

فإن:

$$\text{ر}'_{\text{ص،س}_1\text{.س}_2\text{،س}_3} = \frac{\text{ر}'_{\text{ص،س}_1\text{.س}_2} - \text{ر}'_{\text{ص،س}_3\text{.س}_2} \times \text{ر}'_{\text{س}_1\text{،س}_3\text{.س}_2}}{\sqrt{\left(1-\text{ر}'^2_{\text{ص،س}_3\text{.س}_2}\right)\left(1-\text{ر}'^2_{\text{س}_1\text{،س}_3\text{.س}_2}\right)}}$$

مثال (٧-١٤)

إذا كانت تكلفة إنتاج الوحدة (ص) من منتج معين تتوقف على أجر العامل اليومى (س$_{١}$) بالجنيهات وسعر الوحدة من المواد الخام (س$_{٢}$) بالجنيهات، وفى عينة من ٨ مشاهدات عن المتغيرات ص، س$_{١}$، س$_{٢}$ حصلنا على البيانات التالية:

مجـ ص = ٦٥ ، مجـ س$_{١}$ = ١١٥ ، مجـ س$_{٢}$ = ٧٠ ،

مجـ ص^{٢} = ٥٥٥ ، مجـ س$_{١}^{٢}$ = ١٧٧٩ ، مجـ س$_{٢}^{٢}$ = ٦٣٦،

مجـ س$_{١}$ص=٩٨٣، مجـ س$_{٢}$ص=٥٨٨، مجـ س$_{١}$س$_{٢}$= ١٠٣٥

والمطلوب:

١- تقدير معادلة إنحدار ص/س$_{١}$، س$_{٢}$ بفرض أنها خطيه.

٢- معامل الإرتباط المتعدد بين ص، س$_{١}$، س$_{٢}$.

٣- معامل الإرتباط الجزئى بين ص، س$_{١}$ مع ثبات أثر س$_{٢}$، معامل الإرتباط الجزئى بين ص، س$_{٢}$ مع ثبات أثر س$_{١}$.

الحل:

نحسب أولاً الأوساط الحسابية للمتغيرات ص، س$_{١}$،س$_{٢}$، حيث:

$\bar{ص} = \frac{٦٥}{٨} = ٨,١٣$ ، $\bar{س}_{١} = \frac{١١٥}{٨} = ١٤,٣٨$ ، $\bar{س}_{٢} = \frac{٧٠}{٨} = ٨,٧٥$

وحيث أن الأوساط الحسابية تحتوى على كسور لذلك يفضل استخدام القيم الأصلية لإيجاد المطلوب.

١- معادلة إنحدار ص/س$_{١}$،س$_{٢}$ فى صورتها الخطيه هى:

$$\hat{ص} = \hat{أ}_{.} + \hat{أ}_{١}س_{١} + \hat{أ}_{٢}س_{٢}$$

للحصول على التقديرات $\hat{\text{أ}}_{\text{.}}$ ، $\hat{\text{أ}}_{١}$ ، $\hat{\text{أ}}_{٢}$ نعوض عن المجاميع المختلفة في المعادلات الطبيعيه الآتية:

$$\text{مجـ ص} = \text{ن } \hat{\text{أ}}_{\text{.}} + \hat{\text{أ}}_{١}\,\text{مجـ س}_{١} + \hat{\text{أ}}_{٢}\,\text{مجـ س}_{٢}$$

$$\text{مجـ س}_{١}\text{ص} = \hat{\text{أ}}_{\text{.}}\,\text{مجـ س}_{١} + \hat{\text{أ}}_{١}\,\text{مجـ س}_{١}^{٢} + \hat{\text{أ}}_{٢}\,\text{مجـ س}_{١}\text{س}_{٢}$$

$$\text{مجـ س}_{٢}\text{ص} = \hat{\text{أ}}_{\text{.}}\,\text{مجـ س}_{٢} + \hat{\text{أ}}_{١}\,\text{مجـ س}_{١}\text{س}_{٢} + \hat{\text{أ}}_{٢}\,\text{مجـ س}_{٢}^{٢}$$

كالآتي:

$$\text{٦٥} = \text{٨ } \hat{\text{أ}}_{\text{.}} + \text{١١٥ } \hat{\text{أ}}_{١} + \text{٧٠ } \hat{\text{أ}}_{٢}$$

$$\text{٩٨٣} = \text{١١٥ } \hat{\text{أ}}_{\text{.}} + \text{١٧٧٩ } \hat{\text{أ}}_{١} + \text{١٠٣٥ } \hat{\text{أ}}_{٢}$$

$$\text{٥٨٨} = \text{٧٠ } \hat{\text{أ}}_{\text{.}} + \text{١٠٣٥ } \hat{\text{أ}}_{١} + \text{٦٣٦ } \hat{\text{أ}}_{٢}$$

وبحل هذه المعادلات (بإستخدام المحددات مثلاً) نحصل على:

$\hat{\text{أ}}_{\text{.}} = \text{-٠,١}$ ، $\hat{\text{أ}}_{١} = \text{٠,٢٨}$ ، $\hat{\text{أ}}_{٢} = \text{٠,٤٨}$

فتكون معادلة إنحدار ص/س١، س٢ هي:

$$\hat{\text{ص}}_{\text{ر}} = \text{-٠,١} + \text{٠,٢٨ س}_{١\text{ر}} + \text{٠,٤٨ س}_{٢\text{ر}}$$

٢- لحساب معامل الإرتباط المتعدد بين ص، س١، س٢، فإن:

$$\text{ع}^{٢}_{\text{ق}} = \frac{\text{مجـ ص}^{٢} - \hat{\text{أ}}_{١}\,\text{مجـ س}_{١}\text{ص} - \hat{\text{أ}}_{٢}\,\text{مجـ س}_{٢}\text{ص} - \hat{\text{أ}}_{\text{.}}\,\text{مجـ ص}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{٥٥٥} - (\text{٩٨٣} \times \text{٠,٢٨}) - (\text{٥٨٨} \times \text{٠,٤٨}) - (\text{-٠,١} \times \text{٦٥})}{\text{٨}} = \text{٠,٥٠٣}$$

$$\text{ع}^{٢}_{\text{ق}} = \frac{\text{مجـ ص}^{٢} - \frac{(\text{مجـ ص})^{٢}}{\text{ن}}}{\text{ن}} = \frac{\text{٥٥٥} - \frac{(\text{٦٥})^{٢}}{\text{٨}}}{\text{٨}} = \text{٣,٣٦}$$

معامل الإرتباط المتعدد بين ص، س١، س٢ هو:

$$ر_{ص،س_١،س_٢} = \sqrt{١ - \frac{ع^٢_ق}{ع^٢_ص}} = \sqrt{١ - \frac{٠,٥٠٣}{٣,٣٦}} = ٠,٩٢$$

وهذا يعنى أن هناك تأثيراً قوياً للمتغيرين المستقلين: أجر العامل اليومى ($س_١$) وأسعار المواد الخام ($س_٢$) على المتغير التابع وهو تكلفة إنتاج الوحدة (ص).

٣- لإيجاد معامل الإرتباط الجزئى بين المتغيرين ص، $س_١$ مع ثبات المتغير $س_٢$ نحسب أولاً معاملات الإرتباط البسيطه التالية: $ر_{ص،س_١}$، $ر_{ص،س_٢}$، $ر_{س_١،س_٢}$ حيث نجد أن:

$$ر_{ص،س_١} = \frac{مجـ س_١ص - \frac{مجـ س_١ \times مجـ ص}{ن}}{\sqrt{[مجـ س_١^٢ - \frac{(مجـ س_١)^٢}{ن}][مجـ ص^٢ - \frac{(مجـ ص)^٢}{ن}]}}$$

$$= \frac{٩٨٣ - \frac{١١٥ \times ٦٥}{٨}}{\sqrt{[١٧٧٩ - \frac{(١١٥)^٢}{٨}][٥٥٥ - \frac{(٦٥)^٢}{٨}]}} = ٠,٨٤$$

$$ر_{ص،س_٢} = \frac{مجـ س_٢ص - \frac{مجـ س_٢ \times مجـ ص}{ن}}{\sqrt{[مجـ س_٢^٢ - \frac{(مجـ س_٢)^٢}{ن}][مجـ ص^٢ - \frac{(مجـ ص)^٢}{ن}]}}$$

$$= \frac{٥٨٨ - \frac{٦٥ \times ٧٠}{٨}}{\sqrt{\left[٦٣٦ - \frac{(٧٠)^{٢}}{٨}\right]\left[٥٥٥ - \frac{(٦٥)^{٢}}{٨}\right]}} = ٠,٧٧$$

$$\text{ر}_{\text{س}_١،\text{س}_٢} = \frac{\text{مجـ س}_١\text{س}_٢ - \frac{\text{مجـ س}_١ \times \text{مجـ س}_٢}{\text{ن}}}{\sqrt{\left[\text{مجـ س}_١^{٢} - \frac{(\text{مجـ س}_١)^{٢}}{\text{ن}}\right]\left[\text{مجـ س}_٢^{٢} - \frac{(\text{مجـ س}_٢)^{٢}}{\text{ن}}\right]}}$$

$$= \frac{١٠٣٥ - \frac{١١٥ \times ٧٠}{٨}}{\sqrt{\left[١٧٧٩ - \frac{(١١٥)^{٢}}{٨}\right]\left[٦٣٦ - \frac{(٧٠)^{٢}}{٨}\right]}} = ٠,٥٣$$

وبالتالى فإن معامل الإرتباط الجزئى بين ص، $\text{س}_١$ مع ثبات $\text{س}_٢$ هو:

$$\text{ر}_{\text{ص}،\text{س}_١.\text{س}_٢} = \frac{\text{ر}_{\text{ص}،\text{س}_١} - \text{ر}_{\text{ص}،\text{س}_٢} \times \text{ر}_{\text{س}_١،\text{س}_٢}}{\sqrt{(١ - \text{ر}^{٢}_{\text{ص}،\text{س}_٢})(١ - \text{ر}^{٢}_{\text{س}_١،\text{س}_٢})}}$$

$$= \frac{٠,٨٤ - ٠,٧٧ \times ٠,٥٣}{\sqrt{\left[١ - (٠,٧٧)^{٢}\right]\left[١ - (٠,٥٣)^{٢}\right]}} = ٠,٨٠$$

وهذا يعنى أن هناك علاقه طردية قوية بين تكلفة إنتاج الوحدة (ص) وأجر العامل اليومى ($\text{س}_١$) مع إستبعاد أثر أسعار المواد الخام ($\text{س}_٢$)

بالمثل، فإن معامل الإرتباط الجزئى بين ص، $\text{س}_٢$ مع ثبات $\text{س}_١$ هو:

$$ر'_{ص،س_2.س_1} = \frac{ر_{ص،س_2} - ر_{ص،س_1} \times ر_{س_1،س_2}}{\sqrt{(1 - ر^2_{ص،س_1})(1 - ر^2_{س_1،س_2})}}$$

$$= \frac{0.77 - 0.84 \times 0.53}{\sqrt{[1-(0.84)^2][1-(0.53)^2]}} = 0.71$$

ويعنى ذلك أيضاً وجود علاقة طردية قوية بين تكلفة إنتاج الوحدة (ص) وأسعار المواد الخام ($س_2$) بعد إستبعاد أثر أجر العامل اليومى ($س_1$)، إلا أن درجة الإرتباط بين ص، $س_1$ أكبر من درجة الإرتباط بين ص، $س_2$.

(٧-٣-٢-١) **إختبار معنوية معامل الإرتباط الجزئى.**

بعد حساب معامل الإرتباط الجزئى $ر'_{ص،س_1.س_2}$ أو $ر'_{ص،س_2.س_1}$ إعتماداً على بيانات عينة حجمها ن، فإنه يمكن الإستفادة من هذا المعامل المحسوب من العينه فى إلقاء الضوء على مدى معنوية معامل الإرتباط الجزئى المناظر فى المجتمع الأصلى الذى سحبت منه عينة الدراسة عند مستوى معنوية معين.

فإذا إعتبرنا أن معامل الإرتباط الجزئى بالعينة هو $ر'$ ورمزنا لمعامل الإرتباط الجزئى المناظر له بالمجتمع الأصلى بالرمز $ر'_{(م)}$، وأن غ تمثل عدد المتغيرات التى تم تثبيتها وإزالة أثرها فيلاحظ أن القيمة:

$$ر' \sqrt{\frac{ن - غ - 2}{1 - ر'^2}}$$

تتبع توزيع ت بدرجات حرية ن - غ - ٢

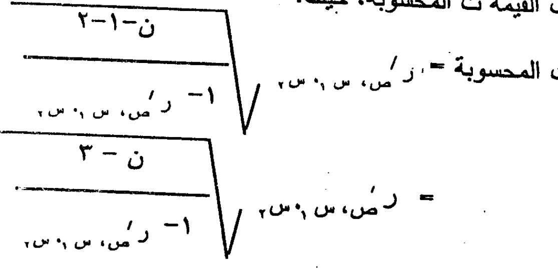
فإذا إعتبرنا الحالة التى يكون لدينا فيها متغير تابع ص ومتغيرين مستقلين س١، س٢ يؤثران عليه بصورة خطية، وكان معامل الإرتباط الجزئى المحسوب من العينة بين ص، س١ مع إستبعاد أثر س٢ هو- كما سبق أن بينا - $ر/_{ص، س١، س٢}$ ، وأن معامل الإرتباط الجزئى المناظر له بالمجتمع الأصلى هو $ر/_{(م) ص، س١، س٢}$ فإنه يمكن إختبار ما إذا كان $ر/_{(م) ص، س١.س٢}$ يساوى الصفر أم يختلف معنوياً عن الصفر، حيث تصاغ المشكله كما يلى:

H_0: $ر/_{(م) ص، س١.س٢}$ = صفر وهذا يعنى أن معامل الإرتباط الجزئى بين ص، س١ مع استبعاد أثر س٢ بمجتمع الدراسة يساوى صفر (أى أن الإرتباط منعدم)

H_1: $ر/_{(م) ص، س١.س٢}$ ≠ صفر ويعنى أن المعامل المذكور يختلف معنوياً عن الصفر

ويجرى الإختبار كما هو معتاد وفقاً للخطوات التالية:

١- نحسب القيمة ت المحسوبة، حيث:



$$ت \text{ المحسوبة} = ر/_{ص، س١، س٢} \sqrt{\frac{ن-١-٢}{١-ر/^2_{ص، س١، س٢}}} = ر/_{ص، س١، س٢} \sqrt{\frac{ن-٣}{١-ر/^2_{ص، س١، س٢}}}$$

٢- نوجد قيمة ت من الجدول عند درجات الحريه ن-غ-٢ أى ن -١-٢= ن-٣ وعند مستوى المعنويه $\frac{\alpha}{٢}$ ونحدد بها منطقة القبول والرفض لـ H_0

٣- بمقارنة قيمة ت المحسوبه مع قيمة ت المستخرجه من الجدول يتم قبول أو رفض H_0.

مثال (٧-١٥)

فى مثال (٧-١٤) إختبر ما إذا كان معامل الإرتباط الجزئى بالمجتمع بين ص، س١ مع إستبعاد أثر س٢ معنويا أم لا وذلك بدرجة ثقة ٩٥٪.

الحل:

بالرجوع إلى مثال (٧-١٤) نجد أن:

ن= ٨، $ر^{/}_{ص، س١، س٢}$ = ٠,٨،

غ (عدد المتغيرات التى تم إستبعاد أثرها وهى المتغير س٢)=١، α = ٠,٠٥

H_0: $ر^{/}_{(م)\ ص، س١. س٢}$ = صفر

H_1: $ر^{/}_{(م)\ ص،س١.س٢}$ ≠ صفر

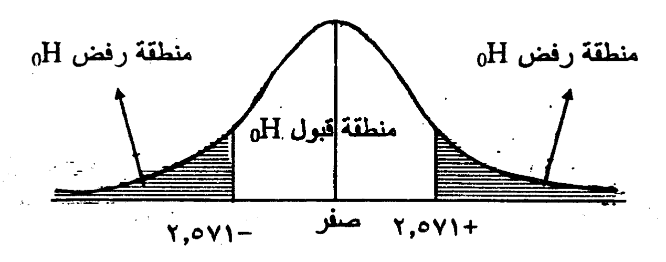
$$\text{قيمة ت المحسوبة} = ر^{/}_{ص، س١، س٢} \times \sqrt{\frac{ن-غ-٢}{١-ر^{/}_{ص، س١، س٢}}}$$

$$= ٠,٨ \times \sqrt{\frac{٨-١-٢}{١-٠,٦٤}} = ٢,٩٨$$

قيمة ت الجدولية = ت (ن − غ − ٢، $\frac{\alpha}{٢}$)

= ت (٥، ٠,٠٢٥) = ٢,٥٧١.

وتكون منطقتا قبول ورفض H_0 كما هو مبين:



وحيث أن قيمة ت المحسوبة تزيد عن قيمة ت الجدولية أى تقع فى منطقة الرفض، لذلك نرفض H_0 ونقبل بالتبعية H_1 وبالتالى فإن قيمة معامل الإرتباط الجزئى بين ص، س١ مع إستبعاد أثر س٢ بالمجتمع تعتبر معنوية عند درجة الثقة ٩٥٪.

جدول ثوابت خرائط مراقبة الجودة

عـدد المفردات فى العينة (ن)	خرائط المتوسط – معاملات حدى المراقبة			خرائط الانحراف المعيارى – معامل الخط الأوسط	خرائط الانحراف المعيارى – معاملات حدى المراقبة				خرائط المدى – معامل الخط الأوسط	خرائط المدى – معاملات حدى المراقبة			
	أ	أ١	أ٢	حـ٢	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	د٢	د١	د٢	د٣	د٤
٢	٢,٠٢٠	٣,٧٦٠	١,٨٨٠	٠.٥٦٤٢	صفر	٠.٨٤٣	صفر	٣,٢٦٧	٠,١٢٨	صفر	٣,٦٨٦	صفر	٣,٢٦٧
٣	٠,٧٣٢	٢,٣٩٤	١,٠٢٣	٠,٧٢٣٦	صفر	٠.٨٥٨	صفر	٢,٥٦٨	٠,٦٩٣	صفر	٤,٣٥٨	صفر	٢,٥٧٥
٤	٠,٥٠٠	٠,٨٨٠	٠,٧٢٩	٠.٧٩٧٩	صفر	٠.٨٠٨	صفر	٢,٢١٦	٢,٠٥٩	صفر	٤,٦٠٨	صفر	٢,٢٨٢
٥	٠,٣٤٢	٠,٥٩٦	٠.٥٧٧	٠.٨٤٠٧	صفر	٠,٧٥٦	صفر	٢,٠٨٩	٢,٣٢٦	صفر	٤,٩١٨	صفر	٢,١١٥
٦	٠,٢٢٥	٠,٤٠٠	٠,٤٨٣	٠.٨٦٨٦	٠.٠٢٦	٠.٧٠٠	٠,٠٣٠	٠,٩٧٠	٢,٥٣٤	صفر	٥,٠٨٧	صفر	٢,٠٠٤
٧	١,٠٣٤	٠,٢٧٧	٠,٤٠٩	٠.٨٨٨٢	٠,١٠٥	٠,٦٧٢	٠,٠٠٨	١.٨٨٢	٢,٧٠٤	٠,٢٠٥	٥,٣٠٣	٠,٠٧٦	١,٩٢٤
٨	٠,٠٦٠	٠,٠٧٥	٠,٣٧٢	٠.٩٠٧٢	٠,٠٦٧	٠.٦٣٨	٠,٨٠٥	٠.٨١٥	٢,٨٤٧	٠.٣٨٧	٥,٣٠٨	٠.٣٦	١,٨٦٤
٩	٠,٠٠٠	٠,٠٩٤	٠,٣٣٧	٠.٩٠٣٩	٠,٢٠٩	٠.٦٠٩	٠,٢٢٩	٠.٧٦٠	٢,٩٧٠	٠,٥٤٦	٥,٣٩٤	٠,٨٤	١,٨١٦
١٠	٠,٩٤٩	٠,٠٢٨	٠,٣٠٨	٠,٩٢٢٧	٠,٢٠٢	٠.٥٨٤	٠,٢٨٤	٠.٠٧٦	٣,٠٧٨	٠,٦٨٧	٥,٤٦٩	٠,٢٢٣	١,٧٧٧

مراجع الكتاب

١- د. جلال الصياد وآخــــرون (١٩٩٠) ، مقدمة في طرق المعاينة الإحصائية - مكتبة مصباح - جدة - السعودية

٢- د. داود المدني وآخرون (١٩٨٤) ، الإحصاء التطبيقي - مكـــــتبة عين شمس القاهرة - مصر

٣- د. سمير فهمي حــجازي (١٩٩٣) ، مقدمة في الإحصاء التطبيقي - مكتبة عين شمس القاهرة - مصر

٤- د. عبد اللطيف أبو العــــلا (١٩٩٥) ، التحليل الرياضي للعلوم الإدارية والاقتصادية - مكتبة الجلاء الحديثة - مصر

٥- د. عثمان على شلبي وآخرون (١٩٩١) ، مقدمة في الإحصاء التطبيقي - المكتبة العلمية - الزقازيق - مصر

٦- د. محمد عبد السميع عناني (١٩٨٣) ، مقدمة في الإحصاء التطبيقي - مكتبة المدينة - الزقازيق - مصر

٧- د. محمد فتحي مــحمد على (١٩٧٠) ، الإحصاء في اتخاذ القرارات التجارية - مكتبة عين شمس - القاهرة - مصر